

# KVANTDATORER IDAG – D-WAVE

Patric Manner

Kandidatavhandling i Datateknik

Handledare: Jan Westerholm

Åbo Akademi

Fakulteten för Naturvetenskaper och Teknik

## Referat

D-Wave Systems är ett företag som har tillverkat världens första kommersiella kvantdator. I en kvantdator utnyttjas kvantmekaniska fenomen som superposition, tunneleffekten och sammanflätning av partiklar för att utföra beräkningar. Datorerna är designade för att lösa randvillkorslösa binära kvadratiske optimeringsproblem m.h.a. en process som heter kvantglödning, vilken baserar sig på att fysiska system alltid strävar efter att nå ett minsta energitillstånd. Processen opererar på hårdvaruenheter som representerar basenheten för information i datorn, qubitarna.

Som en användare av en D-Wave-dator ska man kunna formulera sitt problem som en sökning av en lägsta punkt i ett energilandskap. Man har inte makten att påverka qubitarna direkt, utan man måste uttrycka sig i form av begränsningar, som till slut leder qubitarna till en konfiguration som representerar ett energiminimum. D-Wave-datorerna är probabilistiska snarare än deterministiska, vilket gör en beräkning kan förutom bästa svaret också föreslå andra bra svar. Detta kan utnyttjas i andra slags problem relaterade till optimering, till exempel sampling och maskininlärning.

## Nyckelord

Kvantdator, qubit, superposition, kvantglödning, Ising-modell

## Innehållsförteckning

1. Inledning .....	1
2. Ett annorlunda sätt att beräkna.....	2
2.1 Konventionell datorberäkning .....	2
2.2 Beräkningar med hjälp av kvantmekanik .....	2
2.3 Beräkningar på en D-Wave-dator.....	3
3. Hårdvara.....	5
3.1 Helheten.....	5
3.2 Qubit .....	6
3.3 Kopplingar och övrigt kretssystem.....	8
3.4 Avskärmning .....	10
4. Programmering av en D-Wave-dator .....	11
4.1 Kvantglödning .....	11
4.2 Energidiagram i en kvantglödgningsprocess.....	12
4.3 Hamiltonfunktionen och egenvärdesspektrum .....	15
4.4 Problemformulering och kartläggning på hårdvara.....	18
4.5 Mjukvara.....	20
5. Slutsatser .....	21
6. Källor .....	23

## 1. Inledning

Kvantdatorer är inte ett nytt koncept. Kvantmekaniken formulerades redan i början av 1900-talet, men idéer om datorer som utnyttjar sig av kvantmekanik har också redan funnits i flera decennier [1]. Moores lag om att antalet transistorer i (klassiska) datorer fördubblas vartannat år har hittills så gott som hållit, men man börjar misstänka att den utvecklingen inte länge kommer att kunna fortsätta. För att uppehålla Moores lag måste man få plats med allt flera transistorer på kretskorten, vilka i storlek börjar närma sig nedre gränserna av nanometer-skalan. På denna mikroskopiska nivå råder kvantmekaniken och kvanteffekter börjar negativt påverka transistorernas funktion [1]. Ett förslag på detta problemet har varit att utnyttja kvantmekaniken till sin fördel istället att försöka minska på dess inverkan i existerande strukturer. Så tidigt som 1985 började David Deutsch formulera konceptet som lade grunden till den moderna uppfattningen om kvantdatorer [1].

D-Wave Systems är ett kanadensiskt företag som grundades 1999 och är idag den drivande kraften bakom utvecklingen av världens första kommersiella kvantdatorer [2]. Deras vision är att med kvantmekanik lösa världens mest krävande beräkningsproblem och dessutom att göra dessa resurser tillgängliga för allmänheten [3]. I denna avhandling kommer jag att redogöra för hur D-Wave-datorerna fungerar; vilka idéer de är byggda på, hur de idéer är realiserade i hård- och mjukvara och vilka slags problem datorerna kan lösa. Huvudintresset kommer att ligga i de större helhetsbilderna, inte i t.ex. fysiska och matematiska bevis på formler och fenomen (som det kommer finnas ett antal av). I mer matematiska avhandlingar är de kanske motiverat att bevisa dem, men ur en datorteknisk synvinkel introduceras de bara kort för att förstå vad de bidrar med och hur de påverkar systemet som en helhet. Vidare läsning kan man komma åt via referenserna. En stor del av materialet är baserat på D-Waves egen dokumentation, men grundbegreppen om t.ex. kvantmekanik och koncepten kring kvantdatorer är tagna ur andra verk, för att inte bara få företagets (kanske) subjektiva syn på deras egna produkter.

## 2. Ett annorlunda sätt att beräkna

### 2.1 Konventionell datorberäkning

För att förstå vad en kvantdator är och vad den gör är det bra att först reflektera tillbaka på vad en vanlig dator är och gör. På den mest grundläggande nivån är en dator en mängd transistorer som tolkar elektriska spänningar som två olika lägen; en 0 för låg spänning och en 1 för hög spänning. På de binära representationerna utför man sedan aritmetiska och logiska operationer för att beräkna saker och ting. I sig är detta inte någonting märkvärdigt, men det som gör datorer märkvärdiga är deras egenskap att utföra miljarder av dessa olika operationer i sekunden [4]. Trots denna nästan obegripliga hastighet återstår faktumet att det existerar (matematiska) problem som en vanlig dator i princip kan men praktiskt sett inte kan lösa [4].

En av dessa klasser av problem är optimeringsproblem, som givna en mängd variabler ska hitta en optimal konfiguration för dessa inom gränserna för problemen. Traditionellt måste man under lösningen av dessa problem gå igenom alla kombinationer av de inmatade variablerna och evaluera resultaten för att komma fram till ett definitivt svar. De praktiska svårigheterna uppstår i och med att problemen växer exponentiellt med mängden variabler och leder snabbt till i princip oberäkneliga mängder möjliga svar som ska jämföras.

### 2.2 Beräkningar med hjälp av kvantmekanik

För att lösa ovannämnda typens problem har ett förslag varit att man ska ta avstånd från konventionella metoder och tänka om sättet vi manipulerar information och kommer fram till resultat. Kvantmekaniken har visat sig erbjuda metoder för att hjälpa oss på traven i form av fenomen som superposition, sammanflätning (eng. quantum entanglement) och tunneleffekten (eng. quantum tunneling). Dessa utnyttjas och realiseras i någonting som kallas kvantbitar, eller qubitar. En qubit, precis som en vanlig bit, är basenheten för information i sitt respektive system. Den

egentliga fysiska modellen på en qubit presenteras senare i kapitel 3, men matematiskt kan en qubit ses som en vektor och en linjär kombination av (två) tillstånd, en superposition:

$$(1) |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \text{ där } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad [5].$$

' $|\psi\rangle$ ' notationen används inom kvantmekaniken för att beskriva bl.a. tillstånd och  $\alpha$  och  $\beta$  är här komplexa tal, men utöver det betyder formeln är att en qubit (vektorn  $\psi$ ) kan, igen som en vanlig bit, ha olika tillstånd [1]. Dock till skillnad från bara noll och ett kan en qubit finnas i ett tredje tillstånd, nämligen båda samtidigt. Detta låter till en början väldigt kontraintuitivt eftersom vi i vår makroskopiska värld inte stöter på dessa slags fenomen, men kvantmekanisk superposition tillåter ett objekt att existera i flera tillstånd samtidigt (eller den har inte "valt" ett tillstånd ännu och kan vara vilket som helst) [6]. Tillståndet av superposition är emellertid inte ett stabilt läge, utan ett tillfälligt tillstånd hos ett objekt mellan en ändring och observationen av ändringen. När objektet sedan observeras (mäts) och ska användas kommer det att "kollapsa" i något av de grundtillstånden som superpositionen består av [6]. I fallet av qubiten och uttryck (1) kommer qubiten vid mätning kollapsa till en 0 med sannolikheten  $|\alpha|^2$  och till en 1 med sannolikheten  $|\beta|^2$ , enligt randvillkoret  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  [5].

Eftersom qubitarna vid användning bara finns i lika många tillstånd som en vanlig bit kan man ju fråga sig varför man skulle sätta qubitar i superposition om man inte på det sättet får lagrat mer information i dem. Missuppfattningar kan uppstå i och med de avancerade begreppen och fenomenen som hör ihop med kvantmekaniken, men en kvantdator (idag) har trots allt inte större kapacitet att lösa problem som en vanlig dator inte kan lösa [7]. Sist och slutligen opererar en kvantdator, likt en vanlig dator, bara på binära strängar, men kan använda sig av alternativa metoder för att i bästa fall lösa ett problem snabbare än en vanlig dator.

## 2.3 Beräkningar på en D-Wave-dator

Hur fungerar de alternativa metoderna och vad är det för problem som ska kunna lösas snabbare än på en vanlig dator? D-Waves datorer implementerar någonting

som heter kvantglödning (eng. quantum annealing) för att lösa diskreta kvadratiske optimeringsproblem samt andra relaterade problem, som sampling och maskininlärning [3]. Glödning är ett vanligt begrepp inom termodynamiken och betyder att man värmer upp materia, oftast metaller, till olika kritiska temperaturer och kylar ner de kontrollerat för att åstadkomma förändringar i materiales egenskaper. Exempel på eftersökta förändringar är smidbarhet eller hårdhet, som representerar en slags optimal sammansättning för materiales partiklar [8]. Kvantglödning är en liknande process vars mål det är att hitta globala minimum av ingivna värden och formuleras i en D-Wave-dator som ett topologiskt energiminimeringsproblem [3]. Processen baserar sig på att fysiska system naturligt strävar efter att hitta ett tillstånd med den lägsta energinivån, som representerar ett globalt minimum [3]. I vardagen kan man se det i fenomen som att saker rullar ner för sluttande plan eller att varma saker kyls ner med tiden. I kvantglödningprocessen används kvantfluktuation istället för värme, vilket betyder att tillståndet av superposition hos qubitarna avskaffas gradvis för att komma fram till optimala tillstånd för var och en qubit [9].

För att vidare exemplifiera sättet på vilket D-Wave närmar sig optimeringsproblem kan man se på dem som en klättrare i ett bergsområde vars uppgift det är att hitta koordinaterna till den lägsta punkten i landskapet [10]. Uppgiften skulle kunna lösas av en vanlig dator genom att låta klättraren utforska endast det närliggande området och sedan ta beslut utgående från av lokala variationer, men detta skulle högst antagligen ta ett bra tag då lokala minimum i landskapet först måste hittas och jämföras med varandra för att den absolut lägsta punkten till slut skulle kartläggas. I en kvantdator kan istället de kvantmekaniska fenomenen ta över och betydligt minska på antalet steg för att hitta svaret. För det första används qubitarnas superposition, vilket gör det möjligt att nå flera platser samtidigt (qubitarna befinner sig i två lägen) och genast avgöra vilken punkt som är lägre. Informationen om vilken punkt som ska väljas behöver alltså inte lagras i qubiten och sedan jämföras och beslutas av t.ex. en processor, utan väljs naturligt av qubiten i dess strävan att hitta ett minsta energitillstånd [11]. Eftersom detta är en central egenskap hos D-Wave-datorer stärker det föreställningen om att dessa maskiner inte är universella datorer, utan tillverkade för väldigt speciella syften [11]. För det andra används tunneleffekten och sammanflätning av partiklar. Tunneleffekten är en

kvantmekanisk egenskap som, liksom superpositionen, är främmande för oss i vardagliga livet, men tillåter partiklar att potentiellt röra sig igenom objekt. Man har skämtsamt sagt att en människa i princip kan springa igenom en vägg, men att det sker så sällan att det inte lönar sig att försöka. Tack vare partiklars våg-partikel-dualitet kommer de att inom utsträckningen av en våg, som representerar sannolikheten att hitta partikeln, kunna hittas var som helst på vågen [6]. Det betyder att om en partikel rör sig mot ett objekt och vågen sträcker sig igenom objektet finns det en möjlighet att hitta partikeln på den andra sidan [12]. Detta möjliggör för klättraren, inom ramen av exemplet, att gå igenom berg istället för att klättra över dem och således minska sannolikheten att fastna på lokala minimum. Sammanflätning av partiklar minskar ytterligare på den här risken genom att förse klättraren med korrelationer mellan terrängkoordinater som leder till lägre punkter. Sammanflätningen åstadkoms med speciell hårdvara och betyder att vi kopplar ihop qubitar så att ändringar i en av dem påverkar grannarna på ett bestämt sätt [13].

Trots att exemplet är förenklat gäller det för en programmerare av en D-Wave-dator att formulera sina problem enligt en viss modell, så att de kan kartläggas som en sökning av lägsta punkten i ett (energi)landskap [10]. Datorn kommer att gå igenom de möjliga svaren samtidigt och producera ett svar som representerar ett energiminimum. En poäng som är värd att nämna är att den här typens kvantdatorer är probabilistiska snarare än deterministiska, så förutom att förse användaren med det bästa svaret kommer den också ge förslag på en mängd bra svar. Detta kan till en början verka som en onödig egenskap att ha, men är ett kraftigt verktyg inom utvecklingen av t.ex. maskininlärning [4].

### 3. Hårdvara

#### 3.1 Helheten

Beräkningar m.h.a. kvantmekanik introducerar koncept och fenomen som inte direkt är normala under vanliga omständigheter, vilket betyder att för att man ska kunna dra nytta av dem krävs det väldigt speciell hårdvara. Arkitekturen i en



kvantdator skiljer sig också betydligt från t.ex. en klassisk Von Neumann arkitektur: processorn i en D-Wave-dator liknar en biologisk hjärna, med neuroner som består av qubitar och kopplingar som beter sig som synapser. Det finns inte någon central minnesenhet, utan qubitarna har ett eget litet minne var för sig [14]. Omständigheterna i vilka processorn opererar i skiljer sig också starkt från normen. Det krävs bl.a. en temperatur på 15 millikelvin för att datorn ska fungera på optimal nivå [14].

De extrema temperaturerna är nödvändiga för att åstadkomma kvantmekaniska effekter i den makroskopiska världen, vilka annars bara förekommer på mikroskopisk nivå [15]. Då materia (metaller i det här fallet) kyls ner till väldigt låga temperaturer blir de så kallade supraledare. I det supraledande tillståndet börjar bl.a. elektronerna i metallen bete sig som vågor som orsakar interferensmönster och den elektriska resistansen minskar till noll, vilket ger upphov till kvantmekaniska effekter [12]. Den effekt som man i kvantdatorer vill åstadkommas kallas Josephson-effekten, vilken tillåter en ström att uppstå mellan två supraledare, åtskilda av ett fåtal nanometer tunt oxidlager, utan att extern spänning appliceras [12]. Gränssnitt som uppvisar Josephson-effekt kallas en Josephson-övergång (eng. Josephson junction) och används bl.a. för att ytterst noga mäta väldigt små magnetfält [12]. En stor del av elementen i processorn i en D-Wave-dator innehåller Josephson-övergångar [14].

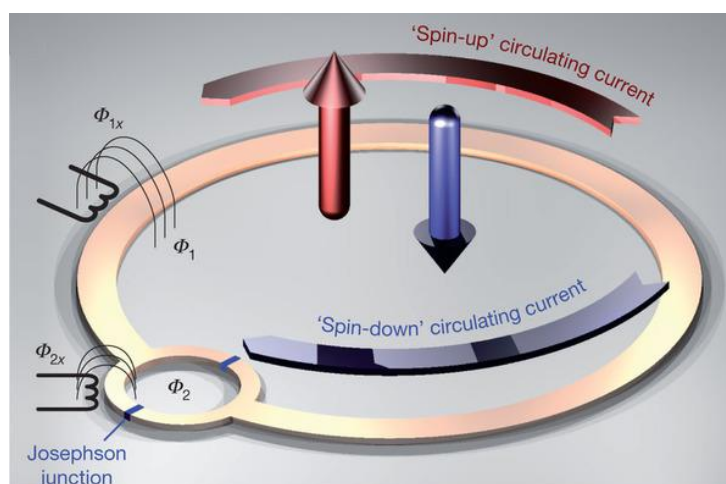
För att komma ner i de kritiska temperaturerna och skapa supraledare krävs det ett ytterst kraftigt nerkylningsystem, vilket bidrar till majoriteten av D-Wave-datorernas storlek. I sin helhet är en dator ungefär 10' x 7' x 10' (3.048m x 2.1336m x 3.048m) [3]. Till följande presenteras den relevanta hårdvaran som bygger upp en D-Wave-dator.

### 3.2 Qubit

En qubit är grundenheten för information i en kvantdator och det är dessa byggstenar som beräkningarna baserar sig på. Eftersom kvantdatorer är en såpass ny teknikgren finns det inte ännu standarder eller ett bästa sätt att konstruera en

qubit på. Det har föreslagits flera olika alternativ på vilka sätt qubitar skulle representeras: som två olika polarisationer av en foton; som riktningen hos kärns spinnet i ett uniformt magnetfält; som två lägen hos en elektron som kretsar kring en ensam atom [1]. Vilken representationen än är gäller det för systemet att kunna realisera en qubits viktigaste egenskap, nämligen att kunna sättas i ett tillstånd av superposition.

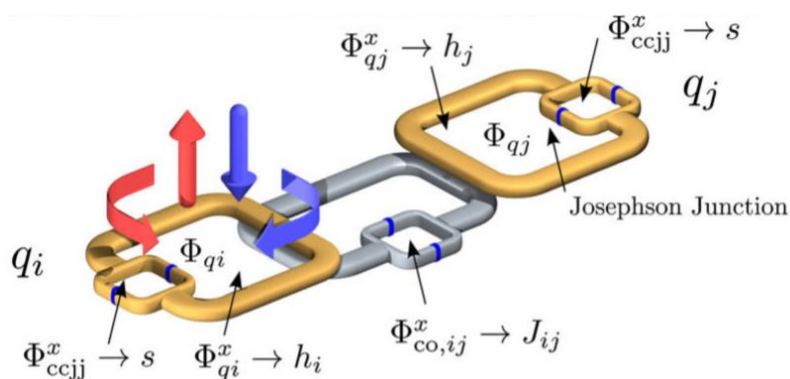
I D-Wave-systemen har man valt ett alternativ där magnetfält utnyttjas. De klassiska transistorerna i en vanlig dator ersätts med ”kvantransistorer”, som består av supraledande qubitar eller så kallade SQUID:ar (Superconducting QUantum Interference Device) [12]. Figur 1 visar en illustration av en SQUID samt magnetfälten som verkar i den. SQUID:arna i sig består av en ring med Josephson-övegångar och är tillverkad av niobium (ett metalliskt grundämne), där det i ringstrukturen kodas in två tillstånd i två små magnetfält. De två tillstånden kallas -1 och +1 (kan ses i sammanhanget som ferromagnetism och antiferromagnetism [16]) och de motsvarar de klassiska tillstånden 0 och 1, där det ena pekar neråt och det andra uppåt. Qubitar kan alltså m.h.a. de två magnetfälten sättas i ett tillstånd av superposition så att det inte ännu har ”valt” någondera av -1 eller +1 tillstånden. När datorn ska beräkna ett resultat influeras qubitarna och deras magnetfält så att bara ett av magnetfälten förblir aktivt [14].



Figur 1. En niobiumring som påverkas av två magnetfält. Pilarna indikerar riktningen på spinnen hos magnetfälten. [9]

### 3.3 Kopplingar och det övriga kretssystemet

Det att en qubit kan finnas i ett av två tillstånd eller båda samtidigt är visserligen ett nyttigt verktyg att ha, men den verkliga kraften ur en kvantdator fås först då dessa qubitarna kopplas samman och tillåts utbyta information. Detta åstadkoms med hjälp av kopplingar (eng. couplers), som, liksom qubitarna, består av supraledande ringar och kan i kombination med qubitarna bilda programmerbara kvantenheter [14]. Figur 2 visar en förenklad bild av två stycken qubitarna sammankopplade med ett kopplingselement.

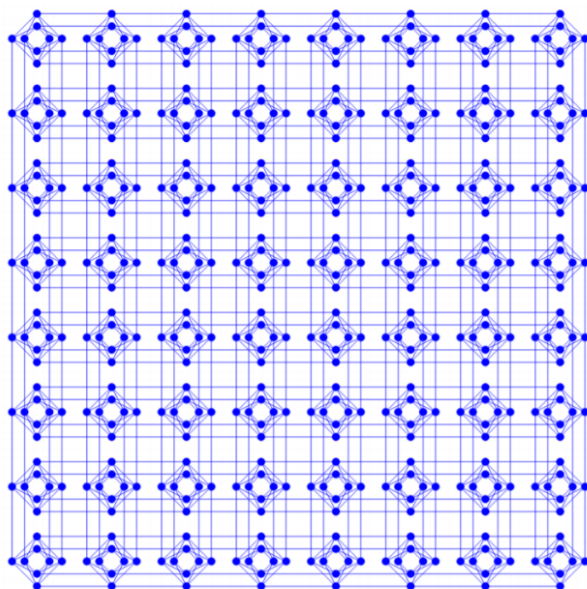


Figur 2. Två qubitarna sammankopplade av en koppling. Qubitarna representeras av de gyllene rektanglarna och kopplingen av den gråa rektangeln.  $\Phi_{q_i}$  och  $\Phi_{ccjj}$  är de programmerbara biaserna (kapitel 4) hos den  $i$ :te qubiten märkt  $\Phi_{q_i}$ .  $\Phi_{co,ij}$  är styrkan (kapitel 4) hos kopplingen mellan qubitarna [17].

Det som en koppling gör är att den ser till, genom att påverka den energiska lönsamheten hos tillstånden, att en qubit som har antagit ett tillstånd påverkar sitt par så att paret antingen antar det samma eller det motsatta tillståndet (beroende på ingivna värden och problemställningen) [18]. Detta betyder att qubitarna effektivt är sammanflätade och kan ses som ett enhetligt objekt med fyra möjliga tillstånd (om två qubitarna alltså kopplas samman) [18]. Då dessa sammanflätningar, liksom de enskilda qubitarna, sätts i superposition kan man ta alla de möjliga tillstånden i beaktande samtidigt, vilket bidrar till att mera tillstånd än med enstaka qubitarna kan gås igenom samtidigt och beräkningarna blir snabbare. Ju mera qubitarna man kopplar

samman, desto flera tillstånd kan man gå igenom samtidigt,  $2^n$  stycken för att vara exakt (där  $n$  är antalet ihopkopplade qubitar och 2 kommer från de två tillstånden: 0 och 1) [18].

Den senaste D-Wave-modellen (D-Wave 2000Q) innehåller 2048 qubitar vilka är sammankopplade med 5600 kopplingar. Qubitarna kopplas ihop i celler av åtta qubitar, vilka i sin tur är kopplade till varandra så att de går att kartlägga som en bipartit Chimera-graf (eng. bipartite Chimera graph) [19]. En bipartit graf består av två mängder som är kopplade till varandra så att det inom samma mängd inte finns några kopplingar [20]. De två mängderna som bildar de bipartita graferna är de vänstra och de högra delarna i varje cell [21]. En Chimera-graf i sin tur är ett rutnät av dessa mindre grafer [19]. Ett exempel på en sådan graf illustreras i figur 3, där alla kopplingar i en 512 qubits D-Wave Two-dator är utritade [22]. Cellerna kopplas till varandra lite annorlunda beroende på problemet som ska lösas och hur det kan kartläggas till grafen [21], men strukturen är baserad på Ising-modellen (eng. Ising model) som inom statistisk mekanik beskriver hur individuella ferromagnetiska element i en struktur påverkar sina grannar [23]. Ising-modellen kommer att vara ett centralt begrepp när man ska programmera en kvantdator.



Figur 3. Åtta qubitars celler strukturerade och sammankopplade i en Chimera-graf i en D-Wave Two-dator. De blåa noderna representerar qubitarna, bågarna representerar kopplingarna [22].

Förutom qubitar och kopplingar består det övriga kretssystemet av ett ramverk av brytare, som via Josephson-effekten styr magnetiska pulser av information för att adressera och spara informationen i qubitarnas magnetfält [14]. Eftersom minnet är lokalt till varje qubit måste varje qubit också ha en egen minnesläsningseenhet. Dessa enheter är inaktiva under beräkningar, så att de inte stör qubitarnas beteende, men avläser dem då de kollapsat i något av de två klassiska tillstånden (0 eller 1) [14]. Svaret på beräkningen får användaren i slutändan således som en sträng av nollor och ettor.

### 3.3 Avskärmning

Isolering är en viktig faktor i D-Wave-datorerna. Liksom i alla konstruktioner vill man minska på störningar som når kritiska delar av systemet, men i kvantdatorer, som innehåller bland de mest komplexa supraledande kretsar som hittills skapats [14], är minimeringen av all slags extern (oavsiktlig) påverkan avgörande för deras funktion. Förutom att uppehålla de exceptionellt låga temperaturerna isoleras systemet mot bl.a. vibrationer, brus och extern magnetisk störning [3].

För att överhuvudtaget få processorn att fungera kvantmekaniskt krävs en temperatur på 80 millikelvin, men i den senaste D-Wave-modellen kyls hela processorn och delar av ett input/outputsystem (ungefär 10 kilogram av materia) ner till 15 millikelvin. Temperaturen är ungefär 180 gånger kallare än yttre rymden och åstadkoms med ett kylsystem som använder helium som nerkylningsmedel, vilket flödar i ett slutet omloppssystem och behöver således inte påfyllas eller ersättas [14].

Input/outputsystemet är länken mellan användaren och den isolerade processorn. Det består av ett användargränssnitt för inmatning av instruktioner, elektronik för konvertering av digitala signaler till analoga och lågfrekventa bandpassfilter som kopplas till de metalledningarna (övergår till supraledande ledningar mot slutet) som är direkt kopplade till processorn [14]. På grund av den direkta kopplingen och känsligheten hos processorn sätts det ovanliga krav på materialet och processerna

som används. Materialet måste bl.a. vara icke-magnetiskt och tåla upprepade nerkylningar och uppvärmningar mellan 20 millikelvin och rumstemperatur [14]. Kraven uppfylls av runt 200 kraftigt filtrerade tenn-ledningar, men den känsliga processor-designen är trots detta utsatt för magnetisk störning och vibrationer [14]. För att minska på de yttre krafternas påverkan befinner sig processorn i högt vakuum, ungefär 10 miljarder gånger mindre än atmosfärtrycket [24], och är omringad av flera lager av skärmning. De innersta skydden består av fem koncentrisk och cylindriska sköldar, vissa som består av material med hög permeabilitet och andra av supraledande material. Med dem åstadkomms ett magnetfält på 1 nanotesla kring processorn [14]. Jordens magnetfält är ungefär 50 000 gånger starkare än magnetfältet som råder i utrymmet som processorn befinner sig i [24]. Dessutom skyddas hela maskinen av ett hölje (datorns yttre skal) som filtrerar ut elektromagnetisk strålning i radiovågsspektrumet [14].

## 4. Programmering av en D-Wave-dator

### 4.1 Kvantglödning

Som energilandskap-exemplet demonstrerade närmar sig en D-Wave-dator ett givet problem väldigt annorlunda jämfört med en vanlig dator. Den presenterade arkitekturen och hårdvaran antyder också på att programmeringen inte består av direkt manipulering av bitar med hjälp av t.ex. logiska grindar, vilket är den klassiska metoden. Kvantglödning är processen som reglerar i D-Waves kvantdatorer och det är viktigt att förstå skillnaden mellan den och ett system som använder sig av en grind-modell. Ett system som använder sig av grindar (logiska eller kvantgrindar) kontrollerar evolutionen av (qu)bitar genom att ta in strängar och via diverse logiska operationer (grindarna) producera en resulterande sträng. När man använder sig av kvantglödning har man inte explicit kontroll över evolutionen av qubitarna, men det man har kontroll över är uppsättningen av problemet, vilket uppgör den programmerbara delen av processen [18]. Efter att man har formulerat problemet låter man kvantmekaniken göra sitt och utnyttjar den

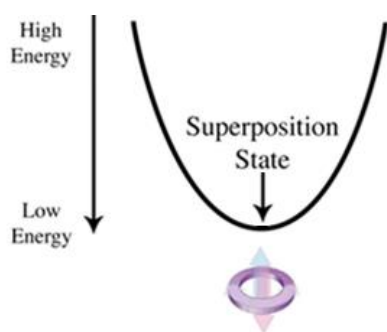
naturliga evolutionen av qubitarna (söka fram de lägsta energitillstånden) för att i slutändan få ut en sträng som representerar de optimala konfigurationen hos qubitarna [11].

Kvantglödgningsprocessen löser visserligen bara ett snävt område av problem, men processen är såpass simpel att D-Wave har lyckats skala upp processorerna så att de nått beräkningsnivåer för att på ett tillfredsställande sätt kunna lösa de problemen. Det är uppenbart att ett system som har kontroll över manipulationen av qubitar har kapacitet att lösa en större mängd problem än bara optimeringsproblem, men teknologin har ännu inte utvecklats så mycket att den skulle kunna hantera de ytterst känsliga kvantmekaniska tillstånden i mer än tio stycken qubitar åt gången [11].

Innan man kan börja programmera en D-Wave-dator måste man komma underfund med hur alla beståndsdelar hör ihop. Kvantglödningen är den figurativa vävnaden som binder samman de kvantmekaniska fenomenen, hårdvaran och beräkningarna i en kvantdator som hittills presenterats. De följande styckena behandlar uppsättningen av problemen, energirepresentationen av den underliggande fysiken och dynamiken under processen som ingår i beräkningarna i en D-Wave-dator.

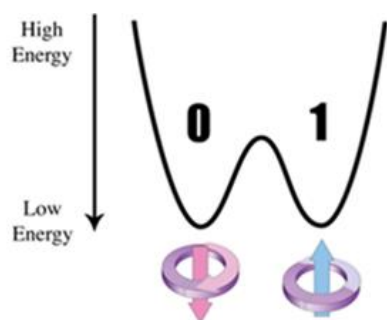
## 4.2 Energidiagram i en kvantglödgningsprocess

Qubitarna är de byggstenarna som systemet baserar sig på och de enheter som kvantglödningen opererar på. Deras utveckling under processen kan illustreras som energidiagram. Kvantglödgningsprocessen börjar med att de två magnetfälten  $-1$  och  $+1$  i en qubit aktiveras, alltså sätts den i superposition. Den lägsta punkten (lägsta energitillståndet) på kurvan i figur 4 motsvarar superpositionstillståndet av qubiten [18].



Figur 4. Energidiagrammet för en qubit i superposition. [18]

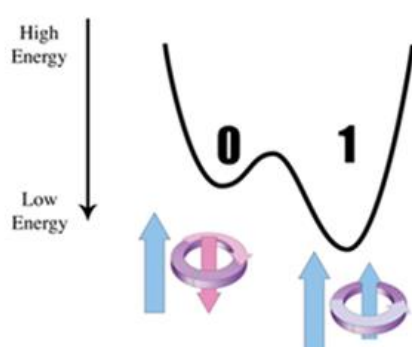
När processen körs växer det sakta fram en energibarriär, vilket omvandlar diagrammet till en s.k. dubbelkvantbrunn (eng. double-well potential) som i figur 5 [18]. Medan kvantglödningen framskrider kommer qubiten så småningom att kollapsa i något av de två dalarna, vilka representerar de två klassiska tillstånden 0 respektive 1. Innan qubiten förblir i ett tillstånd dock kan den, förrän barriären blir för stor, växla mellan tillstånden tills den avgjort vilket av dem är lämpligare. I klassiska (icke-kvantmekaniska) system sker växlingen med hjälp av termisk fluktuation och qubiten ”hoppas” över barriären tills energin inte längre räcker för att komma över den [9]. I ett kvantmekaniskt system kan qubiten använda sig av tunneleffekten, vilket möjliggör en mycket längre tid att besluta mellan tillstånden, då qubiten inte behöver överskrida hela barriären utan kan passera igenom den till andra sidan [9]. Om inget annat tas i beaktande kommer chansen att hamna i det ena eller det andra tillståndet 50%, vilket i praktiken betyder att de är energiskt lika gynnsamma [18].



Figur 5. En dubbelkvantbrunn. [18]



Ifall chansen att hamna i de båda tillstånden skulle förbli jämnt skulle man inte ha någon nytta av qubitarna i bemärkelsen att lösa optimeringsproblem, då resultaten skulle vara så gott som slumpmässiga. Det går dock att påverka fördelningen med yttre (avsiktliga) magnetfält, vilket gör att qubiten minimerar sin energi i magnetfältets närvaro och tippar på dubbelkvantbrunnen så att det ena tillståndet blir mer sannolikt enligt figur 6 [18].

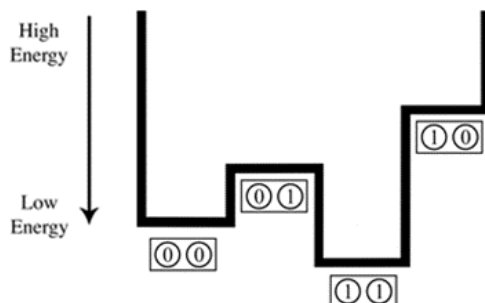


Figur 6. Dubbelkvantbrunn i närvaron av ett yttre magnetfält. Det högra tillståndet är mer sannolikt i och med att energinivån är lägre [18].

Det applicerade yttre magnetfältet kallas en bias [18] eller en tyngd (eng. weight) och den utgör en av de två sätten en programmerare har att påverka qubitarna [13]. Det andra sättet hör ihop med kopplingar. När qubitar kopplas ihop med en koppling har man möjlighet att bestämma till vilken grad och åt vilket håll (samma eller motsatt värde) qubitarna påverkar varandras tillstånd, vilket kallas en kopplings styrka (eng. strength) [13]. De sammanflätade partiklarnas energitillstånd kan också ses som ett diagram i figur 7 och där består de sammansatta tillståndens energinivåer av de två qubitarnas enskilda biaser samt kopplingens styrka [18].

Analogt kan man ställa upp diagram för vilken mängd sammanflätade qubitar som helts, vilket i princip är det man gör när man programmerar en D-Wave-dator. Som programmerare ska man välja biaserna som verkar på varje enskild qubit samt styrkan på kopplingarna mellan dem, vilka utgör problemets begränsningar [13]. Inom ramarna av dessa begränsningar utförs sedan kvantglödningen, vilket

definierar ett energilandskap, och qubitarna leds till en konfiguration som motsvarar den lägsta energinivån, alltså svaret på optimeringsproblemet [18].



Figur 7. Kopplingarnas styrka höjer eller sänker sannolikheten för olika tillstånd beroende på ingivna värden. I diagrammet gynnas tillstånden med samma värde [18].

### 4.3 Hamiltonfunktionen och egenvärdesspektrum

För att få en bättre bild om hur ett problem ska ställas så att kvantdatoren kan lösa det måste man ta en djupare titt på dynamiken i systemet under kvantglödningen, vilket går att beskriva med hjälp av Hamiltonfunktioner (eng. Hamiltonian) och egenvärdesspektrum (eng. Eigenspectrum). Hamiltonfunktionen är en matematisk funktion som representerar energin i ett fysiskt system [6], bl.a. i Ising-modeller [25]. Ett egenvärdesspektrum beskriver en mängd egenvärden som representerar diskreta energinivåer för specifika vågfunktioner [6]. Om man använder dessa verktyg tillsammans kan man få ut ett systems totala energi under olika omständigheter, t.ex. de olika kombinationerna av tillstånd hos qubitarna [18]. Under kvantglödningen försöker man alltså hitta de tillstånden som tillsammans bidrar till den minsta energimängden i en Hamiltonfunktion.

Kvantglödningen kan beskrivas av en Hamiltonfunktion för hela systemet:

$$(2) H(t) = \Gamma(t) \sum_{i=1}^N \Delta_i \sigma_i^x + \Lambda(t) H_P \quad [9].$$

Utan att gå allt för djupt in på matematiken bakom formeln kan man se på uttrycket på den högra sidan i två delar:

$$(3) \Gamma(t) \sum_{i=1}^N A_i \sigma_i^x$$

$$(4) \Lambda(t) H_P$$

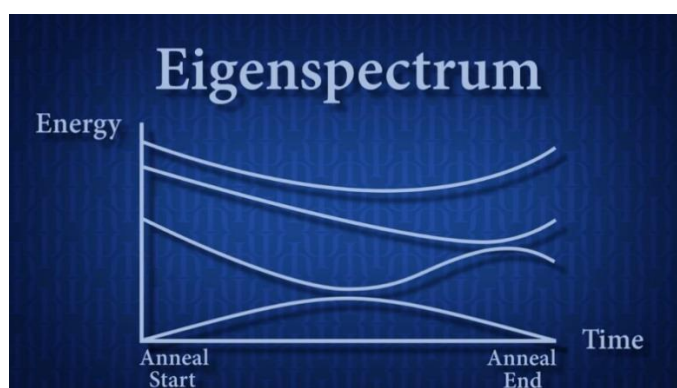
$\Gamma(t)$  och  $\Lambda(t)$  är båda tidsberoende och kommer under kvantglödning monotont ändra;  $\Gamma(t)$  från ett till noll och  $\Lambda(t)$  från noll till ett [9]. Till en början kommer uttryck (2) i praktiken bara bestå av uttryck (3), vars lägsta energitillstånd beskriver alla qubitar i superposition [9]. Det betyder alltså att man tack vare kvantmekaniken redan från första början har ett slags grundtillstånd, den energinivån som nås med den optimala konfigurationen av qubitar och kopplingar (eftersom superpositionen också täcker det fallet). Det som man inte har är de explicita tillstånden hos qubitarna, så för kvantglödningen återstår det att hitta den konfigurationen av qubitar tillsammans med de ingivna biaserna och styrkorna som beskrivs i uttryck (4).  $H_P$  termen i uttryck (4) kan skrivas ut som

$$(5) H_P = \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i^z + \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z \quad [9].$$

Första summan i uttryck (5) omfattar qubitarna, där  $\sigma_i^z$  är spinnets eller riktnings på magnetfältet (tillstånden -1 och +1) och  $h_i$  är biaserna. I den andra summan står  $\sigma_i^z \sigma_j^z$  likaså för qubitarnas spinn och  $J_{ij}$  är styrkorna för kopplingarna mellan qubitarna [9].

Biaserna och styrkorna är användarens inmatade värden som beskriver problemet medan qubitarnas spinn beräknas ut under kvantglödningen så att Hamiltonfunktionens energi i uttryck (4) motsvarar det i uttryck (3) med alla qubitar i superposition. Under processen minskar man på uttryck (3) och ökar på uttryck (4) med tiden och till slut har man bara uttryck (4) kvar i uttryck (2). Om processen görs tillräckligt sakta kommer man att hålla sig i grundtillståndet, som uttryck (3) etablerat med qubitarnas superposition, genom hela övergången till uttryck (4) [9]. Tillstånden i uttryck (3) är kvanttillstånd (superposition) medan de är klassiska i uttryck (4), vilket betyder att under övergången kollapsar alla qubitar från sitt kvanttillstånd till ett klassiskt (en 0 eller en 1) [18].

Övergången som sker i uttryck (2) under kvantglödningen kan visuellt väldigt behändigt presenteras med egenvärdesspektrum som i figur 8. De går att ställa upp i grafer som innehåller de olika energitillstånden som systemet kan befinna sig i under processen, där den nedersta kurvan är grundtillståndet och de andra kurvorna består av andra (möjliga) konfigurationer [18].



Figur 8. Ett egenvärdesspektrum med olika energitillstånd för en kvantglödgningsprocess [18].

Systemet befinner sig till en början på den nedersta kurvan, då bara uttryck (3) är i kraft, men när processen framskrider och uttryck (4) introduceras kommer andra energinivåer att komma närmare grundtillståndskurvan. Ju närmare en kurva kommer grundtillståndet, desto större är risken att systemet ”hoppas ur” grundtillståndet till en annan energinivå och således uppnås inte en optimal konfiguration [18]. Stället där grundtillståndet befinner sig närmast en annan kurva kallas minsta energigapet (eng. minimum gap) [18]. Orsaken till att systemet kan hoppa från en energinivå till en annan beror på överloppsenergi, som i sin tur kan bero på termisk fluktuation (värme) eller att kvantglödningen sker för snabbt, vilket gör systemet har för mycket energi [18]. Kvantglödning som sker tillräckligt sakta, så att systemet hålls i grundtillståndet, kallas en adiabatisk process, vilket betyder att inget värmeutbyte sker med omgivningen [26]. D-Wave-datorer indelas i och med detta förutom i kvantdator-kategorin också inom den i undergruppen adiabatiska kvantdatorer [11].

## 4.4 Problemformulering och kartläggning på hårdvara

Grunden för formuleringen av optimeringsproblem utgörs av Ising-modellen som kan på basis av Hamiltonfunktionen i uttryck (5) formuleras som

$$(6) E(s|h, J) = \sum_{i \in V(G)} h_i s_i + \sum_{(i,j) \in E(G)} J_{i,j} s_i s_j \quad [27]$$

och strukturen kan byggas upp i en Chimera-graf  $G$ , med qubitar som noder  $V(G)$  och kopplingar som bågar  $E(G)$  [27]. Tillsammans konstrueras dynamiken som presenterades visuellt med energidiagram och egenvärdesspektrum till ett fungerande system. Det finns olika sätt att anpassa anslutningarna som hårdvarustrukturen kräver för att kunna beräkna ett problem: global inbäddning (eng. global embedding) och lokalt strukturerad inbäddning (eng. locally-structured embedding) [25]. Det första sättet innebär att man modellerar begränsningarna (biaserna och styrkorna) enligt Ising-modellen utan att ta i hänsyn hårdvarans struktur och använder sedan en heuristisk undergraf-inbäddnings algoritm (eng. minor-embedding algorithm) [22] för att kartlägga modellen på hårdvaran. I det andra sättet försöker man modellera varje begränsning på en delgraf (eng. subgraph) inom en större graf  $G$ , placera in modellerna på hårdvaran och koppla samman variabler som uppkommer i flera olika delgrafer [25].

För att få problemet kartlagt på en graf  $G$  måste man identifiera en Ising-modell för varje begränsning, vilka antas på  $n$  stycken binära variabler beskrivas av en delmängd  $F \in \{-1, 1\}^n$  (tillåtna tillstånd för qubitarna) [25]. Målet är att hitta en modell som skiljer på de mängder av  $s_i$  (qubitar ur uttryck (6),  $i = 1 \dots n$ ) som är delmängder av  $F$  och de som inte är det. För detta ändamål konstrueras s.k. strafffunktioner (eng. penalty functions) [27] för varje begränsning, som representeras i formen av uttryck (6) med en extra kompenserande energikonstant [27] och ändrar sitt värde beroende på om  $s$  tillhör  $F$ . Funktionen blir noll om det är en delmängd av  $F$  och större än ett värde  $g$  då det inte gör det och bildar på det sättet de ramar som styr (tippar på dubbelkvantbrunnarna) qubitarna till sina slutliga tillstånd. Värdet  $g$  kallas strafffunktionens gap och motsvarar i egenvärdesspektrumet gapen mellan kurvorna; ju mindre värdet på  $g$  är, desto svårare är det att hitta ett optimalt svar på problemet [27]. Strafffunktionen tar in

qubitar som två olika grupper: ”beslutsvariabler” och kompletterande variabler [25]. Beslutsvariablerna är de qubitar som  $F$  är beroende av, medan de kompletterande variablerna (t.ex. qubitar som är oanvända) används för att underlätta konstruktionen av delgrafer på  $G$ .

Själva kartläggningen av Ising-modellerna består av två steg: utplacering av strafffunktioner på delgrafer av  $G$  och ihopkopplandet av variabler som finns i flera olika begränsningar. För att åstadkomma detta krävs det att naturligtvis att problemet går att dela upp i delgrafer av hårdvarugrafen, som t.ex. figur 3. Detta är inte en trivial begränsning, då optimeringsformatet i sig själv redan gallrar bort en stor mängd giltiga inmatningsvärden som inte går att omformulera som diskreta kvadratiske minimeringar. De problem som går att formas som sådana går sällan direkt att applicera på hårdvaran p.g.a. att qubitarnas interaktion med varandra är begränsat till högst 6 andra qubitar p.g.a. hårdvaru- och designbegränsningar [22]. Det finns dock ett sätt att öka på tillgängligheten av qubitarna för varandra. Det går att, genom att använda flera fysiska qubitar, representera logiska qubitar, vilka möjliggör en flexiblare kartläggning på hårdvaran [13]. Strukturen kallas en kedja [27] och består i princip av strafffunktioner som gör att alla de fysiska qubitarna i kedjan antar samma värde. För att koppla ihop logiska qubitar räcker det att hitta någon qubit från den första logiska qubitens kedja av fysiska qubitar som är kopplad till någon fysisk qubit från den andra logiska qubitens kedja [13]. De förenämnda kompletterande variablerna i strafffunktionen används bl.a. för att skapa de logiska qubitarna [27].

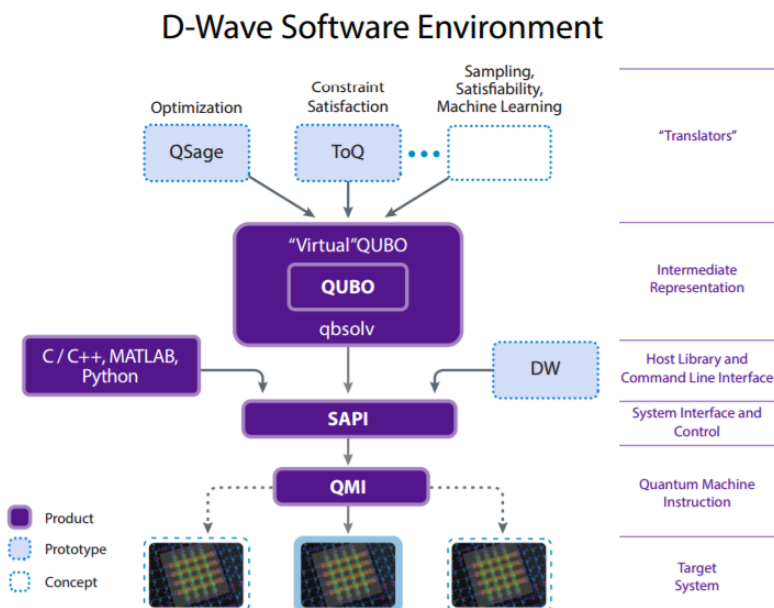
När det är dags applicera strafffunktionerna på hårdvaran kommer det två olika metoderna att kartlägga problemet på hårdvaran in. Båda utnyttjar Ising-modellen och logiska qubitar, men applicerar strafffunktionerna lite olika. När man använder sig av global inbäddning går kartläggningen ut på att iterativt och systematiskt, med beaktande av granngrafer, placera ut strafffunktionerna som undergrafer (eng. minors) på hårdvarugrafen genom att räkna ut kortaste vägen (med vikter) till oanvända noder (qubitar) [22]. Eftersom qubitarnas antal ännu är relativt liten i D-Wave-datorerna och eftersom de logiska qubitarna använder upp flera av de fysiska qubitarna blir det ofta omöjligt för algoritmen att hitta oanvända noder i hårdvarugrafen för att placera ut undergrafer [22]. Då tillåts att undergraferna tillfälligt att dela noder och en bra inbäddning kan ses som en uppsättning som delar

på så få noder som möjligt [22]. I lokalt strukturerad inbäddning lägger man mycket mer vikt på att utnyttja strukturen hos hårdvaran, bl.a. genom att medvetet försöka placera begränsningar som delar på variabler nära varandra [27]. För att koppla samman variabler ur olika delgrafer använder man algoritmer för att bilda minimala spänntred (också känt som Steiner Tree problemet) [27].

De två inbäddningsmetoderna har båda sina för- och nackdelar. Den globala inbäddningen har visat sig använda färre qubitarna och kortare kedjor i de logiska qubitarna, medan den lokalt strukturerade inbäddningen har använts för problem av större skala och kräver ofta inte lika stor precision av parametrarna [25]. Många av algoritmerna som används är än så länge heuristiska, vilket betyder att utveckling inom dessa utförs konstant [22].

## 4.5 Mjukvara

Det händer en hel del i D-Wave-datorerna när beräkningar utförs, men en hel del måste också göras för att få maskinerna att beräkna just det som frågas efter. För en slutanvändare är det mesta som händer i en D-Wave-dator dock irrelevant. Delgraferna, Ising-modellerna, de logiska qubitarna m.m. är inte saker som en användare av dessa maskiner behöver tänka på; de formuleras automatiskt m.h.a. algoritmerna. Det enda som en användare behöver ange för att kunna utföra en beräkning är en mängd värden som representerar biaserna för qubitarna och styrkorna för kopplingarna [3]. D-Wave förser användare med gränssnitt till deras kvantdatorer via internet och tillåter dem att, förutom att beräkna saker, också utveckla algoritmer och applikationer med D-Waves egna verktyg. Figur 9 ger en bild över mjukvarumiljön hos D-Wave. Bibliotek för mer etablerade språk som C/C++, Python och MATLAB har också implementerats för att ytterligare motivera programmerare att utveckla systemen [3]. Även om det ännu bara finns ett fåtal kvantdatorer i världen är det viktigt att redan från första början bygga upp ett aktivt samhälle av både utvecklare och användare av kvantdatorer, som alla bidrar med mjukvarusystem, verktyg och applikationer [3].



Figur 9. En uppställning av mjukvarusystemet som finns tillgängligt och lite om vad som planeras i framtiden [3].

## 5. Slutsatser

D-Wave har tagit på sig uppgiften att skapa världens första kommersiella kvantdator i ett försök att revolutionera datorvärlden. Försöket har redan lett till flera generationer av kvantdatorer, med både optimism [28] och skepticism [29] som respons från resten av världen. Diskussionen som förts ända sen första början är om D-Wave systemen verkligen opererar kvantmekaniskt. Många experiment har utförts för att undersöka om fenomenen som sker i maskinerna faktiskt är av kvantmekanisk natur: tunneleffekten [9], sammanflätning av partiklar [17] och minsta energigapet [30]. En annan fråga som aktivt diskuterats är om det går att skala upp processorerna så att de kan operera lika effektivt på allt flera qubitar [21]. Hittills har frågorna besvarats jakande och D-Wave har flera stora supportrar för deras verksamhet, bl.a. Google, NASA, USRA och Lockheed Martin [28].

Framtiden ser bra ut för kvantdatorer, men också full av utmaningar. Kvantglödningen har redan visat sig konkurrenskraftig med etablerade klassiska optimeringsalgoritmer och i vissa (speciella) fall t.o.m. tusentals gånger snabbare



[19]. Beräkningskraften väntas öka ytterligare då processorer med allt flera qubitar konstrueras och deras konkurrenskraft med klassiska superdatorer växer, men inte bara på avseende av beräkningskapacitet. De supraledande systemen har visat sig använda en konstant mängd elenergi (25 kW mot klassiska superdatorers 2500 kW) även om prestandan har ökat dramatiskt [3], vilket i framtiden kan vara en stor fördel för kvantdatorer. Alla världens beräkningsproblem är dock inte lösta i och med D-Wave-datorerna. Det har redan kommit upp många gånger att D-Wave-datorerna löser ett väldigt marginellt område av problem och här ligger de största utmaningarna för både D-Wave och kvantdatorindustrin som helhet. Medan D-Wave aspirerar att utvidga och utveckla sina system att omfatta problem som maskininlärning, finansiell modellering, hälsovård och säkerhet [3] kommer ett större steg för hela datorindustrin att vara utvecklingen av en universell kvantdator. Dessa maskiner skulle alltså inte bara utnyttja kvantmekanik för att försnabba ett systems naturliga evolution, utan faktiskt manipulera qubitar och deras tillstånd. Det har redan utvecklats kraftiga kvantalgoritmer, som Shors algoritm för faktorisering av stora tal och Grovers algoritm för databassökning, som spekulerats vara otroligt mycket effektivare än algoritmer vi har idag, men som kräver en universell kvantdator [11].

Kvantdatorer är verklighet, men de har ännu inte den kapacitet som namnet kanske ger sig förstå. Enligt D-Waves egna ord har kvantdatorernas revolution satts i rörelse [3], men den kommer ännu kräva mycket arbete, undersökning och innovationer. Hur mycket kvantdatorerna kommer att påverka datorvärlden återstår att se, men för att åstadkomma någonting måste man börja och det är vad D-Wave-datorerna har gjort. De har skapat en början.

## 6. Källor

- [1] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang. (2000). "Quantum Computation and Quantum Information" [Online]. Tillgänglig: <http://www.michaelnielsen.org/qcqi/QINFO-book-nielsen-and-chuang-toc-and-chapter1-nov00.pdf> (Hämtad 10.2.2017)
- [2] "Meet D-Wave" [Online]. Tillgänglig: <https://www.dwavesys.com/our-company/meet-d-wave> (Hämtad 2.4.2017)
- [3] "The D-Wave 2000Q Quantum Computer Technology Overview" [Online]. Tillgänglig: [https://www.dwavesys.com/sites/default/files/D-Wave%202000Q%20Tech%20Collateral\\_0117F.pdf](https://www.dwavesys.com/sites/default/files/D-Wave%202000Q%20Tech%20Collateral_0117F.pdf) (Hämtad 10.2.2017)
- [4] "Quantum Computing Primer" [Online]. Tillgänglig: <http://www.dwavesys.com/tutorials/background-reading-series/quantum-computing-primer> (Hämtad 11.2.2017)
- [5] Sina Jafarpour. (2006). "Introduction to the World of Quantum Computers" [Online]. Tillgänglig: <http://ieeexplore.ieee.org/xpls/icp.jsp?arnumber=4216503#sec2a1> (Hämtad 11.2.2017)
- [6] David A. B. Miller. Quantum Mechanics for Scientists and Engineers. Cambridge (University Press), 2008
- [7] Marco Lanzagorta, Jeffrey K. Uhlmann. (2009). "Quantum Computer Science" [Online]. Tillgänglig: [https://books.google.fi/books?id=-wkJluw0YRsC&pg=PA23&lpg=PA23&dq=quantum+computer+computability&source=bl&ots=a4KtRJYu5b&sig=CFvG9L0jBO\\_VpyPRQnjQcb4Ej-E&hl=fi&sa=X&ved=0ahUKEwj4r4Xv-9\\_SAhXEYJoKHVDICVoQ6AEIRTAf#v=onepage&q=quantum%20computer%20computability&f=false](https://books.google.fi/books?id=-wkJluw0YRsC&pg=PA23&lpg=PA23&dq=quantum+computer+computability&source=bl&ots=a4KtRJYu5b&sig=CFvG9L0jBO_VpyPRQnjQcb4Ej-E&hl=fi&sa=X&ved=0ahUKEwj4r4Xv-9_SAhXEYJoKHVDICVoQ6AEIRTAf#v=onepage&q=quantum%20computer%20computability&f=false) (Hämtad 12.2.2017)

- [8] "Nationalencyklopedin, värmebehandling" [Online]. Tillgänglig: <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/v%C3%A4rmebehandling> (Hämtad 24.2.2017)
- [9] M. W. Johnson, M. H. S. Amin, S. Gildert et al. (2011). "Quantum Annealing with Manufactured Spins" [Online]. Tillgänglig: <http://www.nature.com/nature/journal/v473/n7346/full/nature10012.html> (Hämtad 24.2.2017)
- [10] "Quantum Computing – How D-Wave Systems Work" [Online]. Tillgänglig: <https://www.dwavesys.com/quantum-computing> (Hämtad 11.2.2017)
- [11] Dominic Walliman. (2015). "What is Quantum Annealing?" [Online]. Tillgänglig: <https://www.youtube.com/watch?v=zvfkXjzzYOo> (Hämtad 3.3.2017)
- [12] Hugh D. Young & Roger A. Freedman, Sears & Zemansky's University Physics with Modern Physics Fourteenth Edition, Pearson (Education), 2016
- [13] "Programming with D-Wave: Map Coloring Problem" [Online]. Tillgänglig: <https://www.dwavesys.com/sites/default/files/Map%20Coloring%20WP2.pdf> (Hämtad 25.2.2017)
- [14] "Introduction to the D-Wave Quantum Hardware" [Online]. Tillgänglig: <https://www.dwavesys.com/tutorials/background-reading-series/introduction-d-wave-quantum-hardware> (Hämtad 18.2.2017)
- [15] Harry O'Neill. (2015). "Quantum mechanical behaviour at the macroscale" [Online]. Tillgänglig: <https://phys.org/news/2015-02-quantum-mechanical-behaviour-macroscale.html> (Hämtad 10.3.2017)
- [16] J. King, S. Yarkoni, J. Raymond et al. (2017). "Quantum Annealing amid Local Ruggedness and Global Frustration" [Online]. Tillgänglig: [https://www.dwavesys.com/sites/default/files/14-1003A\\_tr\\_Quantum\\_Annealing\\_amid\\_Ruggedness\\_and\\_Frustration.pdf](https://www.dwavesys.com/sites/default/files/14-1003A_tr_Quantum_Annealing_amid_Ruggedness_and_Frustration.pdf) (Hämtad 26.3.2017)
- [17] T. Lanting, A. J. Przybysz, A. Yu. Smirnov et al. (2014). "Entanglement in a Quantum Annealing Processor" [Online]. Tillgänglig: <https://journals.aps.org/prx/pdf/10.1103/PhysRevX.4.021041> (Hämtad 14.3.2017)

- [18] Dominic Walliman. (2015). "How The Quantum Annealing Process Works" [Online]. Tillgänglig: [https://www.youtube.com/watch?v=UV\\_RlCAc5Zs](https://www.youtube.com/watch?v=UV_RlCAc5Zs) (Hämtad 3.3.2017)
- [19] C. C. McGeoch, J. King, M. Mohammadi Nevisi et al. (2017). "Optimization with Clause Problems" [Online]. Tillgänglig: [https://www.dwavesys.com/sites/default/files/14-1001A\\_tr\\_Optimization\\_with\\_Clause\\_Problems.pdf](https://www.dwavesys.com/sites/default/files/14-1001A_tr_Optimization_with_Clause_Problems.pdf) (Hämtad 31.3.2017)
- [20] Eric W. Weisstein. (2017). "Bipartite Graph" [Online]. Tillgänglig: <http://mathworld.wolfram.com/BipartiteGraph.html> (Hämtad 19.3.2017)
- [21] Sergio Boixo, Troels F. Rønnow, Sergei V. Isakov et al. (2013). "Quantum annealing with more than one hundred qubits" [Online]. Tillgänglig: <https://arxiv.org/pdf/1304.4595.pdf> (Hämtad 4.3.2017)
- [22] Jun Cai, Bill Macready, Aidan Roy. (2014). "A practical heuristic for finding graph minors" [Online]. Tillgänglig: <https://arxiv.org/pdf/1406.2741.pdf%E2%80%8B> (Hämtad 29.3.2017)
- [23] S. T. Wierzechon. "Ising Model" [Online]. Tillgänglig: <http://scienceworld.wolfram.com/physics/IsingModel.html> (Hämtad 31.3.2017)
- [24] "The D-Wave 2000Q System – The most advanced quantum computer in the world" [Online]. Tillgänglig: <https://www.dwavesys.com/d-wave-two-system> (Hämtad 18.2.2017)
- [25] Z. Bian, F. Chudak, R. Israel et al. (2016). "Mapping constrained optimization problems to quantum annealing with application to fault diagnosis" [Online]. Tillgänglig: <https://arxiv.org/pdf/1603.03111.pdf> (Hämtad 29.3.2017)
- [26] "Nationalencyklopedin, adiabatisk" [Online]. Tillgänglig: <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/adiabatisk> (Hämtad 3.3.2017)
- [27] Zhenbing Bian, Fabian Chudak, Robert Israel et al. (2014). "Discrete optimization using quantum annealing on sparse Ising models" [Online]. Tillgänglig: <http://journal.frontiersin.org/article/10.3389/fphy.2014.00056/full> (Hämtad 1.4.2017)

[28] "Quantum Computing for the Real World Today" [Online]. Tillgänglig: <http://www.dwavesys.com/sites/default/files/D-Wave-Overview-Jan2017F2.pdf> (Hämtad 2.4.2017)

[29] Jean Francois Puget. (2013). "Is Quantum Computing Useful for Optimization?" [Online]. Tillgänglig: [https://www.ibm.com/developerworks/community/blogs/jfp/entry/will\\_quantum\\_computing\\_kill\\_cplex?lang=en](https://www.ibm.com/developerworks/community/blogs/jfp/entry/will_quantum_computing_kill_cplex?lang=en) (Hämtad 19.3.2017)

[30] N. G. Dickson, M. W. Johnson, M. H. Amin et al. (2013). "Thermally assisted quantum annealing of a 16-qubit problem" [Online]. Tillgänglig: <http://www.nature.com/articles/ncomms2920> (Hämtad 2.4.2017)