

Härledning av vätskesimulering med Navier-Stokes ekvationer

Markus Isaksson, 37875

Kandidatavhandling

Fakulteten för naturvetenskaper och teknik

Datavetenskap

Åbo Akademi

9 april 2018

Innehåll

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Referat | 2 |
| 2 | Beteckningar | 3 |
| 3 | Differentialekvationer | 4 |
| 3.1 | Historia | 4 |
| 3.2 | Exempel | 4 |
| 3.3 | Beskrivning | 6 |
| 4 | Navier-Stokes ekvationer | 7 |
| 4.1 | Härledning | 7 |
| 4.2 | Numerisk lösning för flödet i ett rör | 13 |
| 4.3 | SIMPLE algoritmen | 20 |
| 5 | Implementation av Navier-Stokes ekvationer | 21 |
| 6 | Sammanfattning | 21 |

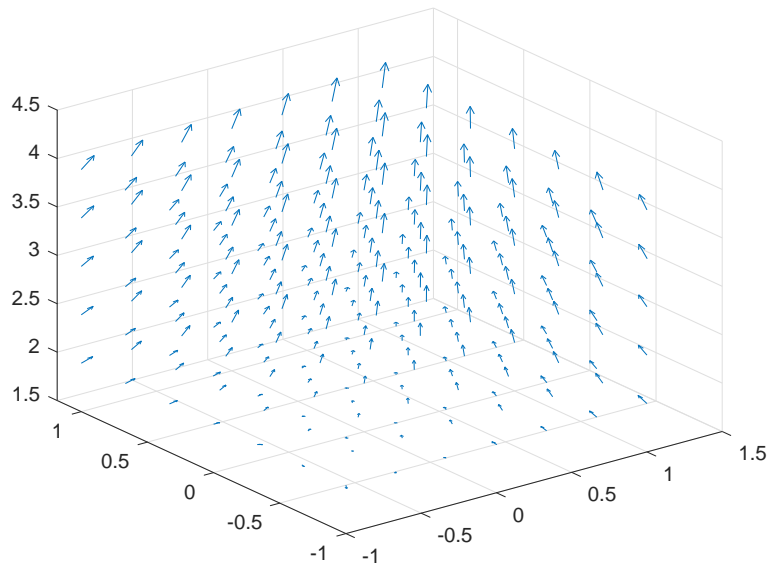
1 Referat

Differentialekvationer är ett kraftfullt verktyg för beskrivande av dynamiska samband och används för att bilda matematiska modeller av universum. Dessa ekvationer beskriver idag så gott som alla dynamiska modeller inom bl.a. planetdynamik, kvantmekanik och vätskedynamik. Uppkomsten av högpresterande datorer introducerade simulering och tillåter många naturliga fenomen, som väder, att replikeras och förutses även i realtid. Detta förutsätter dock att programmerare behärskar differentialekvationer, vilket dessvärre sällan hör till undervisningsprogram då ekvationernas kontinuerliga natur ofta inte direkt kan representeras på datorer.

Jag ger en informell introduktion till differentialekvationer med fokus på intuitiv förståelse, följt av formuleringsmetoder utgående från Navier-Stokes välkända flödesekvationer och implementation av dessa i programmeringsspråket C.

2 Beteckningar

| | |
|-----------------------------------|--|
| [...] | = Alternativ beteckning för parenteser i uttryck med flera parenteser. |
| \mathbf{v} | = Beteckning för vektor och vektorfält. Matematisk modell för att beskriva fenomen med både storlek och riktning, exempelvis hastigheten hos en bil. Ytterligare kan vi vara intresserade av hastigheten i varje punkt i ett rum och vektorn är då resultatet av en funktion i position (och tid), $\mathbf{v}(x, y, z)$. I detta fall är det frågan om ett vektorfält som i fig. 1. |
| u, v, w | = Förkortning för vektorkomponenterna i x, y resp z riktning, $u = v_x, v = v_y$ och $w = v_z$. Notera att vektorkomponenter är skalärer och inte vektorer. |
| \int, \iint, \iiint och \oint | = Integral, ytintegral, volymintegral och kurvintegral. Alla dessa är summering av ett värde över ett infinitesimalt element: avstånd (dx), arealelement (dA), volymelement (dV) eller linjeelement (dl). Ytintegralen kan t.ex. användas för att beräkna massan av en skiva och motsvarar då att dela in skivan i små areor, betrakta massan för dessa och summera alla delareor. Då areorna tillåts bli oändligt små erhålls skivans totala massa. |
| $\frac{df}{dx}$ | = Derivatan av f med avseende på x, vilket också ofta betecknas $f'(x)$. |
| $\frac{\partial f}{\partial x}$ | = Partiell derivata. Detta är en generalisering av derivata för funktioner av högre dimension, t.ex. om f är en funktion av x,y och z måste vi specificera i vilken riktning derivatan skall tas. |
| ∇f | = Gradienten grupperar alla partiella derivator för funktionen f i en vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. |
| $\nabla \cdot \mathbf{v}$ | = Divergensen av \mathbf{v} är en skalär och definieras enligt $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$. Det är ett av två sätt att definiera derivatan för en mångdimensionell vektor [3, s.56]. |
| ρ | = Densitet. |
| Δx | = Avståndet mellan två punkter x_1 och x_2 . |



Figur 1: Vektorfältet för $(u, v, w) = (y + z, x + z, x + y)$.

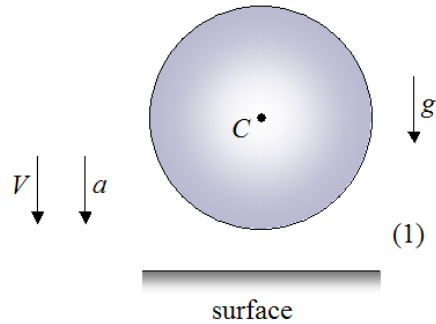
3 Differentialekvationer

3.1 Historia

Textböcker inför ofta differentialekvationers fundamentala aspekter men bortser från deras historia. Differentialekvationer har sina rötter i 1600-talets infinitesimalkalkyl, då dessa inte utjorde något medvetet mål. Istället sysselsatte sig århundradets framgångsrika matematiker med periodens stora matematiska problem: förhållandet mellan distans, hastighet och acceleration, tangenten till kurvor, maximum och minimum samt längden av kurvor [1, p.342-343]. Lösningmetoder utformade av bl.a Fermat [5] och John Wallis [6] generaliserades runt 1670-talet av Isaac Newton och Gottfried Wilhelm Leibniz till differentier och differentialekvationer.

3.2 Exempel

För att få en grundläggande uppfattning om differentialekvationer betraktar jag hur dessa beskriver rörelserna för en fallande boll. Exemplet är en förtydligad version av Jeffrey Chasnov härledning i *Introduction to Differential Equations* [8, s.13].



Figur 2: En fallande boll med hastighets- och accelerations riktning utritad. Platshållarbild, stulen härifrån.

Vi önskar beskriva höjden av en fallande boll som funktion av tiden.

Antagande 1. *Inget luftmotstånd.*

Antagande 2. *Avstånden som betraktas är synnerligen korta i förhållande till jordens radie.*

Bollen, som påverkas av gravitationskraften, följer Newtons andra rörelselag

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (1)$$

Under antagande (1) påverkas bollen enbart av tyngdkraften,

$$m(-\mathbf{a}) = m(-\mathbf{g}), \quad (2)$$

där \mathbf{a} är bollens acceleration och \mathbf{g} tyngdaccelerationen (konstant under antagande (2)). Båda erhåller negativa värden då positiv riktning väljs uppåt. Accelerationen för en massa erhålls av positionens andra tidsderivata och \mathbf{a} kan omskrivas ($x(t)$ s derivata kan anta både positiva och negativa värden varför tecknet har bakats in i $x(t)$)

$$m \frac{d^2}{dt^2}x(t) = m(-\mathbf{g}) \iff \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\mathbf{g}.$$

Genom att integrera båda sidorna

$$\int \frac{d^2}{dt^2}x(t)dt = \int -\mathbf{g} dt \iff \frac{d}{dt}x(t) = -\mathbf{g}t + C \quad (3)$$

och integrera åter

$$\int \frac{d}{dt}x(t)dt = \int -\mathbf{g}t + Cdt \iff x(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + Ct + D \quad (4)$$

erhålls bollens höjd som funktion av tiden. Vi har funnit den allmänna lösningen (4) till vårt problem men önskar bestämma integrationskonstanterna C och D . Detta görs genom att överföra problemet på ett sk. *begynnelsevärdesproblem*. Genom att införa positionens och hastighetens initialtillstånd

$$x(0) = x_0 \quad \frac{d}{dt}x(0) = \mathbf{v}_0$$

kan konstanterna och följaktligen den sk. *partikulärlösningen* bestämmas. Insättning av \mathbf{v}_0 i (3) medför

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\mathbf{g}t + C \implies \frac{d}{dt}x(0) = -\mathbf{g} \cdot 0 + C \iff \mathbf{v}_0 = C$$

och \mathbf{v}_0 samt x_0 i (4)

$$x(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + Ct + D \implies x(0) = -\frac{1}{2}\mathbf{g} \cdot 0^2 + \mathbf{v}_0 \cdot 0 + D \iff x(0) = D = x_0.$$

Insättning av C och D i (4) ger nu partikulärlösningen

$$x(t) = x_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

3.3 Beskrivning

Utan fysik som bakgrund kan arbetsflödet ovan liknas med härledningen av en räkneregel. Till skillnad från "vanliga"ekvationer med funktioner och konstanter, relaterar differentialekvationer funktioner och deras derivator [8, s.13]. Detta beror på att differentialekvationer uppstod som ett sätt att beskriva dynamiska situationer med derivatan (förändring), och inte konstanter, som central roll. I samma bana kan vi observera att svaret inte heller kan vara konstant utan ges av en funktion.

Differentialekvationer delas i tre huvudgrupper och ytterligare undergrupper beroende på deras egenskaper. Exemplet ovan är en sk. (första ordningens) ordinär differentialekvationen, en typ som är lätt att lösa. I allmänhet är kunskap om denna gruppering ytterst viktig ty lösningsmetoder är specifika för dessa grupper [10], då jag fokuserar på en enda differentialekvation nöjer vi oss med att känna till detta. En annan grupp är de partiella differentialekvationerna och vi kommer till följande betrakta en specifik ekvation från denna grupp.

4 Navier-Stokes ekvationer

Claude-Louis Navier var åtta då döden av hans far överförde Naviers uppfostrande till den välavsedda civilingenjören Emiland Gauthey. Under hans uppmanande fann sig Navier 1802 antagen till École Polytechnique (etablerad 1794, fortfarande ett av Frankrikes främsta teknikhögskolor) och kom under sina första år att rangordnas bland skolans bästa studerande.

Under sina studier väcktes Naviers intresse för matematik och han kom under sin livstid att införa analytiskt tänkande till brobyggande, ett område som hittills varit huvudsakligen empiriskt. Under sin livstid var Navier känd för sin expertis inom brobyggande men idag är han bäst känd för sina förbättringarna till Eulers flödesekvationer. Dessa differentialekvationer härleddes av Euler genom att applicera Newtons lagar på ett vätskeelement men hade lite praktiskt värde då Eulers matematiska modell ignorerade vätskans interna friktion. Många forskare, inklusive Navier, strävade således till att korrigera detta genom att introducera en friktionsterm i ekvationerna.

4.1 Härledning

Navier-Stokes ekvationer härleds genom betrakta krafterna som påverkar ett vätskeelement och utnyttja dessa i sambandet mellan Newtons andra lag och rörelsemängdens balans. Slutresultatet är en vektorekvation som likt Newtons andra lag kan skrivas i form av vektorkomponenterna x , y och z :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \iff \begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases} . \quad (5)$$

Denna observation underlättar härledningen då uttrycket för varje komponent är (som i eq. (5)) identisk och det är således tillfredställigt att härleda enbart ett av uttrycken. Jag utnyttjar denna metod och betraktar nedan Navier-Stokes ekvationer i x -led.

Betrakta Newtons andra lag, $F_x = ma_x$, men speciellt dess alternativa form

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} . \quad (6)$$

Denna form säger att krafterna i en punkt motsvarar förändringen i rörelsemängden,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (7)$$

Rörelsemängd är ett mått på mängden rörelse och vi observerar att den är beroende av förändringar i massa och påverkande krafter. Newtons andra lag (6) antyder att skillnaden mellan rörelsemängd och kraft är tid, nämligen en kraft utövad över tid skapar en förändring i kroppens rörelsemängd.

För att påbörja beviset måste ekvation (6) tillämpas på en kropp som lämpligen fastställs härnäst. Det finns flera modeller för att avgränsa en vätska för detta syfte men ett infinitesimalt vätskeelement som i fig. 3 påminner om kraftdiagram i grundkurser i fysik och tillämpas därför här. Ett infinitesimalt element antar godtycklig form, är oändligt liten enligt infinitesimala kalkylen men innehåller trots det en stor mängd partiklar och kan anses vara enhetligt (kontinuum).

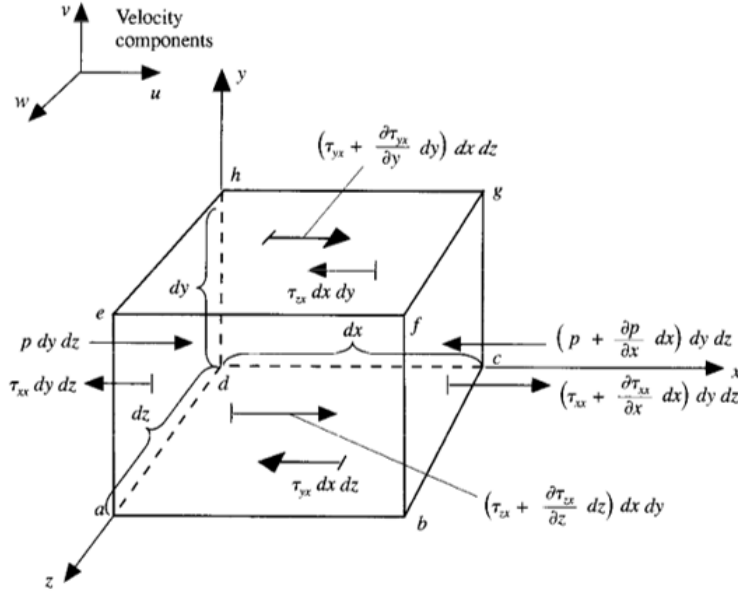
Beteckna volymen i infinitesimala elementet Ω , dess omgivande yta $\delta\Omega$ och unionen av dessa Λ . Enligt (6) bör krafterna och rörelsemängden hos Λ undersökas, men i sin nuvarande form beskriver ekvationen endast en punkt i rummet, inte en volym som Λ . För detta syfte används totala derivatan, bet. $\frac{D}{Dt}$, som beskriver förändringen av en egenskap i förhållande till tid i samband med en volym. Skillnaden till derivatan i (6) är att där betraktas hur rörelsemängd ändras i en fixerad punkt i rymden och hur rörelsemängd ändras i denna specifika punkt över tid. Med totala derivatan följer vi med en volym och betraktar hur dess rörelsemängd ändras över tid. Notera att idén bakom (6) ändras inte till följd av dessa omständigheter (kraft relateras fortfarande till rörelsemängd) och ekvationen omskrivs

$$F_x = \frac{Dp_x}{Dt}. \quad (8)$$

Med dessa förberedelser kan krafterna som påverkar elementet i figuren bestämmas. Krafterna som påverkar elementet kan uppdelas i volymkrafter och ytkrafter [12, s.3].

Volymkrafter påverkar kroppar på avstånd och innefattar tyngdkraft, magnetiska- och elektriska krafter. För vattensimulering är tyngdkraften (\mathbf{G}) den enda kroppskraften och är lätt att härleda ty den erhålls genom multiplikation av massan (m) och gravitationskoefficienten (\mathbf{g}).

$$f_{kropp_x} = G_x = mg_x. \quad (9)$$



Figur 3: Ett infinitesimalt vätskeelement och krafterna som påverkar den. Platshållarbild, stulen härifrån.

Då elementets volym (dV) är känd och elementet utgörs av en vätska med densitet ρ , erhåller vi från (9)

$$f_{kroppx} = \rho dV g_x = \rho dx dy dz g_x \quad (10)$$

som det slutliga uttrycket för kroppskrafterna.

Ytkrafter verkar på ytan av elementet och utgörs av tryck samt vätskans interna krafter (uppfattas som en inre friktion och kallas viskositet). De interna krafterna indelas ytterligare i normalspänning och skjuvspänning, där den första uttrycker krafter ortogonal mot en yta och uttrycks båda i form av en speciell matris kallad en tensor. I fig. 3 beskriver uttrycken innehållande τ komponenter i tensorn där det första index ger normalens riktning för det plan krafterna verkar på och den andra kraftens riktning. Exempelvis är τ_{zx} kraften på främre ytan, ty det första indexet z ger att kraften verkar på plan som är ortogonala mot z -axeln medan det andra indexet (x) ger att kraften verkar i x -led.

Då man betraktar spänningarna på elementet bör riktningen av krafterna specificeras ty notationen ovan antyder inte detta. Riktningen kommer till följd av konvention, ty komponenter är positiva då deras komponenter har

lika tecken och negativ annars och vi ritar de som positiva. Betrakta åter kraften på framytan $z = 1$ samt dess motsvarighet på baksidan $z = 0$, och notera att dessa är motsatt riktade. Framkantens normal är riktad i positiv z riktning varför framkantens spänning måste ritas i positiv x riktning för att komponentens skall vara positiv. Baksidans normal är däremot riktad i negativ z riktning och kraften måste därmed ritas i negativ x riktning. Detta är varför krafterna på motsatta sidor är motsatt riktade.

$$\begin{aligned}
 f_{yta_x} &= \left(p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right) dy dz \\
 &+ \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx - \tau_{xx} \right) dy dz \\
 &+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx} \right) dx dz \\
 &+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx} \right) dx dy
 \end{aligned}$$

Då $p, \tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ tar ut varandra erhålls

$$\begin{aligned}
 f_{yta_x} &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \\
 &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV
 \end{aligned} \tag{11}$$

Genom att sammanställa kroppskrafterna (10) med ytkrafterna (11) kan totala krafterna i x -led uttryckas:

$$\begin{aligned}
 F_x &= f_{kropp_x} + f_{yta_x} \\
 &= \rho dV g_x + \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV \\
 &= \left(\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV
 \end{aligned} \tag{12}$$

Betrakta nu Reynolds Transportteorem:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \mathbf{f} dV}_A = \underbrace{\iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} dV}_B + \underbrace{\iint_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{f} dA}_C. \tag{13}$$

Denna ekvation är en tredimensionell generalisering av Leibniz integreringsregel och ger ett alternativ sätt att beräkna tidsderivatan av volymintegraler då integreringsvolymen Ω varierar med tid. Term A i ekv. (13) beskriver hur skalären, vektorn eller tensorn \mathbf{f} , begränsad av volymen Ω , varierar med tid. Derivatans uttryck A kan inte flyttas in direkt ty vid summering av värdena i integranden (d.v.s vid integrering) slopas idén om att Ω deformerar och därmed summeras inkorrekt värden som lämnat eller flödat in i Ω . Term B beskriver hur \mathbf{f} ändrar inuti volymen medan C beskriver \mathbf{f} s nettoflöde genom ytan av Ω , $\partial\Omega$. Betrakta som exempel en nätpåse under vatten och undersök temperaturen av det omslutna vattnet. Det finns två händelser som ger upphov till temperaturfluktuationer, vattnet strömmar och temperaturen varierar således (B) eller också deformerar påsen och vatten som flödar genom ytan ändrar temperaturen (C).

Inom fysiken tar Reynolds transportteorem (13) formen

$$\frac{D}{Dt}\beta = \iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} B \, dV + \iint_{\partial\Omega(t)} B \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (14)$$

B är en s.k. intensiv storhet och är oberoende av massan hos systemet som betraktas. Exempel på intensiva storheter är temperatur, tryck, rörelsemängd och densitet. β är B s motsvarande extensiva storhet och beror på massan av systemet, exempelvis är massa densitetens motsvarande extensiva storhet. Sambandet mellan B och β ges då av $\beta = mB$. Tillämpad på egenskapen rörelsemängd är extensiva egenskapen $\beta = m\mathbf{v}$ och intensiva $B = \rho\mathbf{v}$, i x-led

$$\frac{DP_x}{Dt} = \iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho u \, dV + \iint_{\partial\Omega(t)} (\rho u) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (15)$$

Konvertera den högra ytintegralen till en volymintegral m.h.a. Gauss divergensteorem och noter att uppkomsten av rörelsemängd i vänster led motsvarar krafterna per volymenhet.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) \, dV + \iiint_{\Omega(t)} \nabla \cdot \rho u \mathbf{v} \, dV \\ &= \iiint_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \nabla \cdot \rho u \mathbf{v} \right] \, dV \end{aligned} \quad (16)$$

Då vätskeelementet är minimalt varierar inte integranden inom den, samma addition upprepas således. Detta kan liknas vid

$$\underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n \text{ st.}} = 2n$$

Tillämpat på eq. (16) får vi

$$F_x = \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot u \rho \mathbf{v} \right] dV \quad (17)$$

Kombinerat med eq. (17) och uttrycket för totala krafterna (12) fås slutligen:

$$\begin{aligned} \left(\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV &= \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (u \rho \mathbf{v}) \right] dV \\ &\iff \\ \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (u \rho \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (18)$$

Detta kallas rörelsemängdsekvationen och är en av två ekvationer som utgör Navier-Stokes ekvationer. Den andra är massans bevarande som härleds nu. Enligt [4, s.15] har vi att massan för ett element inte varierar. Genom att använda Reynolds transportteorem fås

$$\frac{Dm}{Dt} = \iiint_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) + \frac{\partial}{\partial y}(v\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(w\rho) \right] = 0.$$

Då Ω igen är godtyckligt måste likheten hålla för integranden

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) + \frac{\partial}{\partial y}(v\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(w\rho) \stackrel{\text{Kejderegeln}}{=} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (19)$$

Ekvationerna för massans bevarande (19) och en alternativ form av rörelsemängds ekvationen (Hoppas ännu hinna skriva om hur denna erhålls samt vad termerna betyder) kallas tillsammans Navier-Stokes ekvationer:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases}} \quad (20)$$

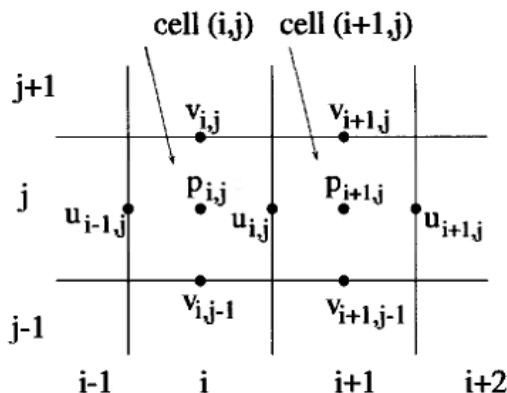
4.2 Numerisk lösning för flödet i ett rör

Två problem uppstår då Navier-Stokes ekvationer skall utnyttjas för simulering. Det första är att NS ger en kontinuerlig beskrivning av vätskeflöde i tid och rum, men en dator arbetar med diskreta värden. För att uppskatta detta problem, kom ihåg att NS härleddes utgående från ett kontinuum och fråga dig själv hur iterativ programkod kunde uttryckas för något kontinuerligt. Det andra problemen är att NS är ett svårt ekvationssystem som ofta saknar analytisk lösning. Svårigheten stammar från en icke-linjär advektionstermen, ekvationerna för konservering av massa och rörelsemängd är beroende (kan ej lösas separat), tryck förekommer enbart som en källa i momentekvation och ingen ekvation ges för hur denna skall bestämmas. I detta avsnitt löser jag samtliga problem genom att diskretisera tid och rum och härleda nya, diskreta, uttryck för NS applicerat på flödet i ett tvådimensionellt rör.

Innan diskretiseringen av ekvationerna kan påbörjas måste en indelningsmetod fastställas. Jag har valt att presentera ett regelbundet gitter av kvadrater både för dess simplicitet och goda tillämpning. I fig. 5 ses att denna uppdelning ger en mycket bra täckning av problemområdet och en jämn resolution vad gäller detaljerna för flödet i olika delar av röret. För mera avancerade problem önskas ofta en detaljerad simulering runt ett objekt medan det övriga flöde är av liten betydelse. I dylika fall används oregelbundna indelningar som glesnar proportionellt till avståndet och som ofta även består av oregelbundna celler för optimal täckning.

För att kunna härleda diskreta uttryck måste variablerna (hastighet, tryck o.s.v.) fördelas över modellen. I en diskret modell förekommer ej variablerna i varje punkt i rummet som i ett kontinuerligt fall utan variablerna måste nu placeras nänstans i modellen. En intuitiv lösning vore att spara

variabler i gittrets knytpunkter, och trots att denna metod används kan den leda till en oscillerande lösning. En vanligare metod för regelbundna gitter är därför ett förskjutet gitter (Harlow & Welch, 1965 [11, s.2]). I denna skapas ytterligare ett gitter som förskjuts med ett halvt steg i alla riktningar. Samtliga skalärer sparas i knytpunkterna för det första gittret medan vektor-komponenter sparas i andra gittret för mitten av den kant som är vinkelrät mot vektorns riktning. På gott och ont bibehåller denna metod en stark koppling mellan hastighet och tryck, vilket löser oscilleringsproblemet men bidrar istället en svårare lösning [9, s.34-35].



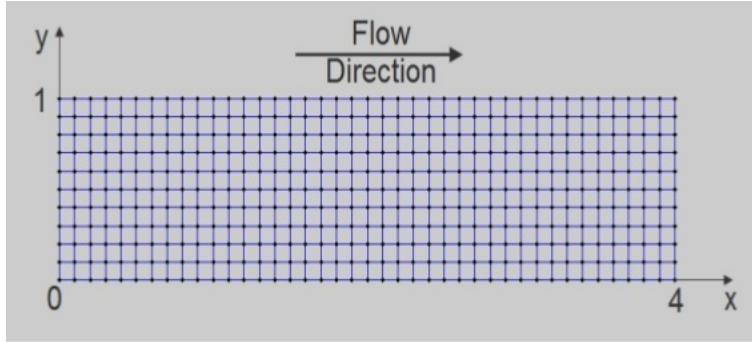
Figur 4: Exempel av ett regelbundet förskjutet gitter med tryck och hastighetskomponenter utritade. Platshållarbild, stulen härifrån.

Antagande 1. Densiteten ρ är konstant, speciellt för vatten är den $1 \frac{g}{cm^3}$.

Antagande 2. Vätskan är inkompressibel.

Vi kan nu tillämpa en diskretiseringsmetod på gittret och välja en av många diskretiseringsmetoder som existerar för gittermodellen. Jag kommer att använda Finite Volume Method (FVM) som är en gammal och väletablerad metod. I denna betraktas, som i härledningen av NS ekvationer, regelbundna volymer. Gittret i fig. 4 kan nu speciellt betraktas som en indelning i volymer (eller celler) som placeras på ett gynnsamt sett.

Låt oss inleda FVM diskretiseringen genom att betrakta konserveringen av massa för en cell som är centrerad i en trycknod. För att underlätta indexnotationen betraktas under diskretiseringen cellens lokala index, d.v.s cellen tilldelas indexet $(0,0)$ istället för (i,j) . Då ett diskretiserat uttryck väl



Figur 5: Ett 2D rör som diskretiserats till ett gitter av rektanglar. Plats-hållarbild, stulen härifrån.

har etablerats är det lätt att övergå till globala index. Från eq. (19) fås under antagande 1

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

Integrera nu över cellen och ändra ytintegralen till en kurvintegral med Greens formel

$$\iint_{Cell} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0 \stackrel{Green}{\iff} \oint_{\partial Cell} (u dy - v dx) = 0. \quad (22)$$

Kurvintegralen kan approximeras genom att gå runt cellen moturs och betrakta integranden för varje kant. Observera att vid övre och vänstra kanten rör vi oss i negativ riktning och dessa integraler erhåller därför negativa värden:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial Cell} (u dy - v dx) \approx & \\ & \underbrace{\left(u_{\frac{1}{2},0} \Delta y_h - v_{\frac{1}{2},0} \Delta x_h \right)}_{\text{Högra}} - \underbrace{\left(u_{0,\frac{1}{2}} \Delta y_u - v_{0,\frac{1}{2}} \Delta x_u \right)}_{\text{Övre}} - \\ & \underbrace{\left(u_{-\frac{1}{2},0} \Delta y_v - v_{-\frac{1}{2},0} \Delta x_v \right)}_{\text{Vänstra}} + \underbrace{\left(u_{0,-\frac{1}{2}} \Delta y_n - v_{0,-\frac{1}{2}} \Delta x_n \right)}_{\text{Nedre}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Då cellen är kvadratisk och roterad enligt axlarna är vänstra och högra kanten lodräta, d.v.s $\Delta x_h = \Delta x_v = 0$. Ett motsvarande resonemang ger att

$\Delta y_n = \Delta y_u = 0$. De resterande kanterna har samma längd, Δx respektive Δy . Föregående uttrycket kan förenklas enligt

$$\begin{aligned} & \left(u_{\frac{1}{2},0} \Delta y - 0 \right) - \left(0 - v_{0,\frac{1}{2}} \Delta x \right) - \left(u_{-\frac{1}{2},0} \Delta y - 0 \right) + \left(0 - v_{0,-\frac{1}{2}} \Delta x \right) \\ & \quad = \\ & \left(u_{\frac{1}{2},0} - u_{-\frac{1}{2},0} \right) \Delta y + \left(v_{0,\frac{1}{2}} - v_{0,-\frac{1}{2}} \right) \Delta x \end{aligned} \quad (24)$$

vilka förutsattes vara noll enligt eq. (22).

$$0 = \oint_{\partial Cell} (u \, dy - v \, dx) \approx \left(u_{\frac{1}{2},0} - u_{-\frac{1}{2},0} \right) \Delta y + \left(v_{0,\frac{1}{2}} - v_{0,-\frac{1}{2}} \right) \Delta x$$

Division med $\Delta x \Delta y$ och övergång till globala index (addera i och j till respektive index) ger ett diskretiserat uttrycket för konservering av massa:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{\left(u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j} \right)}{\Delta x} + \frac{\left(v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}} \right)}{\Delta y} = 0.} \quad (25)$$

Till följande behandlas rörelsemängdsekvationen då cellen centreras i en hastighetsnod (en u nod för diskretisering i u -led, motsvarande för v och w). Här utnyttjas också lokala index under härledningen.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (26)$$

\iff

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (27)$$

Integrera nu över cellen och gruppera termerna enligt följande:

$$\begin{aligned} & \iint_{Cell} \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \, dy + \iint_{Cell} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) \, dx \, dy + \\ & \iint_{Cell} \frac{\partial p}{\partial x} \, dx \, dy - \frac{1}{Re} \iint_{Cell} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \, dx \, dy = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Tillämpa Greens formel

$$\iint_{Cell} \frac{\partial u}{\partial t} dx dy + \oint_{\partial Cell} (u^2 dy - uv dx) + \oint_{\partial Cell} p dy - \frac{1}{Re} \oint_{\partial Cell} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) = 0 \quad (29)$$

Jag diskretiserar nu termerna turvis från vänster till höger. För den första termen är ett rimligt antagande att derivatan inte varierar över cellen (vi kan endast spara ett värde per cell) och som för (16) erhålls då

$$\iint_{Cell} \frac{\partial u}{\partial t} dx dy \approx \frac{\partial u_{0,0}}{\partial t} \Delta x \Delta y. \quad (30)$$

Genom att använda derivatans definition kan vi konstatera att derivatan ovan är skillnaden mellan den nya hastigheten u^{n+1} och den gamla u delat med "avståndet" Δt

$$\frac{\partial u_{0,0}}{\partial t} \Delta x \Delta y \approx \frac{u_{0,0}^{n+1} - u_{0,0}}{\Delta t} \Delta x \Delta y. \quad (31)$$

Term två och tre diskretiseras enligt förfarande för konservering av massa bortsett från den sista divisionen:

$$\oint_{\partial Cell} (u^2 dy - uv dx) \approx \left(u_{\frac{1}{2},0}^2 - u_{-\frac{1}{2},0}^2 \right) \Delta y + \left((uv)_{0,\frac{1}{2}} - (uv)_{0,-\frac{1}{2}} \right) \Delta x. \quad (32)$$

och för tredje termen

$$\oint_{\partial Cell} p dy = \oint_{\partial Cell} (p dy - 0 dx) \approx \left(p_{\frac{1}{2},0} - p_{-\frac{1}{2},0} \right) \Delta y \quad (33)$$

Sista termen innehåller andra gradens derivator och kräver viss särbehandling men vi inleder enligt tidigare metod

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) \approx \left(\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\frac{1}{2},0} - \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{-\frac{1}{2},0} \right) \Delta y + \left(\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{0,\frac{1}{2}} - \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{0,-\frac{1}{2}} \right) \Delta x. \quad (34)$$

Derivatorna kan räknas enligt (detta förstår jag inte ännu)

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\frac{1}{2},0} = (u_{1,0} - u_{0,0}) \frac{\Delta y}{\Delta x \Delta y} \quad (35)$$

Insättning i (34) ger

$$\begin{aligned} & \left[\left(u_{\frac{1}{2},0} - u_{0,0} \right) \frac{\Delta y}{\Delta x \Delta y} - \left(u_{-\frac{1}{2},0} - u_{0,0} \right) \frac{\Delta y}{\Delta x \Delta y} \right] \Delta y + \\ & \left[\left(u_{0,\frac{1}{2}} - u_{0,0} \right) \frac{\Delta x}{\Delta x \Delta y} - \left(u_{0,0-\frac{1}{2}} - u_{0,0} \right) \frac{\Delta x}{\Delta x \Delta y} \right] \Delta x \\ & \iff \\ & \left(u_{\frac{1}{2},0} - u_{0,0} \right) \frac{\Delta y}{\Delta x} - \left(u_{-\frac{1}{2},0} - u_{0,0} \right) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \left(u_{0,\frac{1}{2}} - u_{0,0} \right) \frac{\Delta x}{\Delta y} - \left(u_{0,0-\frac{1}{2}} - u_{0,0} \right) \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ & \implies \\ & \frac{1}{Re} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) \approx \\ & \frac{1}{Re} \left[\left(u_{1,0} - 2u_{0,0} + u_{-1,0} \right) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \left(u_{0,1} - 2u_{0,0} + u_{0,-1} \right) \frac{\Delta x}{\Delta y} \right] \quad (36) \end{aligned}$$

Då samtliga uttryck substitueras in i (29) fås

$$\begin{aligned} & \underbrace{\iint_{Cell} \frac{\partial u}{\partial t} dx dy}_{\frac{u_{0,0}^{n+1} - u_{0,0}}{\Delta t} \Delta x \Delta y} + \underbrace{\oint_{\partial Cell} (u^2 dy - uv dx)}_{\left(u_{\frac{1}{2},0}^2 - u_{-\frac{1}{2},0}^2 \right) \Delta y + \left((uv)_{0,\frac{1}{2}} - (uv)_{0,-\frac{1}{2}} \right) \Delta x +} \\ & \underbrace{\left(p_{\frac{1}{2},0} - p_{-\frac{1}{2},0} \right) \Delta y}_{\oint_{\partial Cell} p dy} + \frac{1}{Re} \underbrace{\left[\left(u_{1,0} - 2u_{0,0} + u_{-1,0} \right) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \left(u_{0,1} - 2u_{0,0} + u_{0,-1} \right) \frac{\Delta x}{\Delta y} \right]}_{\oint_{\partial Cell} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right)} = 0 \quad (37) \end{aligned}$$

Dividera nu med $\Delta x \Delta y$ och övergå till globala index (genom att addera $i + \frac{1}{2}$ och j)

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j}^2 - u_{i,j}^2}{\Delta x} + \frac{\left((uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right)}{\Delta y} + \\ & \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\Delta y^2} \right] = 0. \quad (38) \end{aligned}$$

Observera att detta uttryck omfattar termer som inte existerar i vårt gitter. Alla dessa uttryck, $u_{i+1,j}^2$, $u_{i,j}^2$, $(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ och $(uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, måste interpoleras från värden som faktiskt sparas i vår modell. Genom att interpolera och expandera termerna med dessa uttryck fås (jag har inte hunnit kolla vad som görs här, t.ex. vilken interpolationsmetod används?):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2\Delta x} \left(u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j} \right) + \frac{1}{4\Delta y} \left(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}} \right) + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \frac{2}{Re} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right] u_{i+\frac{1}{2},j} + \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\frac{1}{4\Delta x} u_{i+\frac{3}{2},j} - \frac{1}{Re\Delta x^2} \right) u_{i+\frac{3}{2},j} + \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\frac{1}{4\Delta x} u_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{1}{Re\Delta x^2} \right) u_{i-\frac{1}{2},j} + \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\frac{1}{4\Delta y} \left(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{Re\Delta y^2} \right) u_{i+\frac{1}{2},j+1} + \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\frac{1}{4\Delta y} \left(v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{Re\Delta y^2} \right) u_{i+\frac{1}{2},j-1} \end{aligned}$$

Notera att de fyra sista termerna är en summering över grannarna, som kan sammanfattas (gillar inte detta steg, a är inte väldefinierad)

$$a(u, v)_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j} + \sum_{nb} a(u, v)_{nb} u_{nb}.$$

Slutliga uttrycket för de diskretiserade Navier-Stokes ekvationerna blir såldes:

$$\begin{cases} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} + a(u, v)_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j} + \sum_{nb} a(u, v)_{nb} u_{nb} + \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} = 0 \\ \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + b(u, v)_{i,j+\frac{1}{2}} v_{i,j+\frac{1}{2}} + \sum_{nb} b(u, v)_{nb} u_{nb} + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} = 0 \\ \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} = 0 \end{cases}$$

Vi har nu löst första problemet knytet till lösningen av NS numeriskt. Ekvation (42) och (27) är diskretiserade algebraiska uttryck för Navier-Stokes ekvationer som kan beräknas på en dator. Noter dock att det andra problemet återstår, nämligen (42) innehåller både hastighet och tryck som okända men ingen ekvation ges för att beräkna en av dessa, detta löses i nästa avsnitt.

4.3 SIMPLE algoritmen

Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations (SIMPLE) ger oss ett sätt att först approximera trycket och därefter lösa hastigheten ur (27). Algoritmen ges av Suhas Pantakar i [2, s.120-129]:

1. Gissa trycket p^* .
2. Lös rörelsemängdsekvationen med p^* och erhåll approximativa lösningar för hastigheterna, u^* o.s.v.
3. Bestäm tryckets korrektionsterm p' .
4. Beräkna verkliga trycket enligt $p = p^* + p'$.
5. Bestäm hastigheternas korrektionstermer u' o.s.v.
6. Beräkna verkliga hastigheten enligt $u = u^* + u'$ o.s.v.
7. Låt $p^* = p$ och fortsätt med 2 tills lösningen konvergerar.

Genom att betrakta (27) uttryckt med u^* och p^* erhåller Pantakar och [11, s.8] (tyvärr stämmer dessa inte sedan jag ändrat härledningen i föregående avsnitt. Idén är dock den samma):

$$\left(\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + a_{i,j}^u \right) u_{i,j}^* + \sum a_{nb}^u u_{nb}^* = -b^u - (p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) \Delta y \quad (39)$$

$$(40)$$

Som bör lösas m.a.p. u^* i steg två ovan. Båda härleder ytterligare korrektionstermerna p' och u' och anländer vid:

$$a_{i,j}^p p'_{i,j} = \sum a_{nb}^p p'_{nb} + b \quad (41)$$

$$u' = \frac{\Delta t \Delta y (p'_{i,j} - p'_{i+1,j})}{\Delta x \Delta y + \Delta t a_{i,j}^u} \quad (42)$$

där

$$b = - (u_{i,j}^* - u_{i-1,j}^*) \Delta y - (v_{i,j}^* - v_{i,j-1}^*) \Delta x \text{ och ger konvergenzkriteriet för sista steget i SIMPLE, } b \approx 0.$$

Med detta är andra problemet för numeriskt lösning av Navier-Stokes ekvationer löst.

5 Implementation av Navier-Stokes ekvationer

6 Sammanfattning

Referenser

- [1] Kline Morris, *Mathematical Thought From Ancient To Modern Times*, New York, Oxford University Press 1972.
- [2] Suhas V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corp 1980.
- [3] John D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill Book Company 1984.
- [4] Dan S. Henningson, Marting Berggren, *Fluid Dynamics: Theory and Computation*, 2005, https://www.mech.kth.se/~henning/CFD/CFD_main.pdf, hämtad 8.4.2018.
- [5] Pierre de Fermat, *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimum* (Metoder för bestämmande av Maxima och Minima) 1637.
- [6] John Wallis, *Arithmetica Infinitorum* 1655.
- [7] Isaac Newton, *Methodus Fixonum et Serierum Infinitarum* 1736.
- [8] Jeffrey R. Chasnov, *Introduction to Differential Equations*, Lecture notes for MATH 2351/2352, 2009, <https://www.math.ust.hk/~machas/differential-equations.pdf>, hämtad 6.3.2017.
- [9] Mónica de Mier Torrecilla, *Introduction to numerical simulation of fluid flows*, JASS 04, St. Petersburg, http://wwwmayr.in.tum.de/konferenzen/Jass04/courses/2/Talks/DeMier_FVM.ppt , hämtad 3.4.2018.
- [10] Bill Goodwine, *Engineering Differential Equations: Theory and Applications*, 2008, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.133.8760&rep=rep1&type=pdf>, hämtad 12.9.2017.

- [11] Indian Institute of Technology, Solution of Navier-Stokes Equations for Incompressible Flows Using SIMPLE and MAC Algorithms, <https://www.iitg.ac.in/director/files/Chapter-6.pdf>, hämtad 1.4.2018.
- [12] Wen-Hsiung Li, Shau-Hai Lam Principles of Fluid Mechanics 1736