SIGBE/11/1

Sinusformade signaler – knep och knåp.
a) Skriv ett program som bestämmer den sinusformade signalen

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$$

i intervallet $0 \leq t \leq t_f$. Använd samplingsintervallet T_s. Programmet skall som argument ha amplituden A, fasen ϕ, frekvensen f, samplingsfrekvensen $f_s = 1/T_s$ och sluttiden t_f. Programmet skall generera en vektor **xx** med de samplade signalvärdena $\{x(kT_s)\}$, dvs

$$\texttt{xx} = [x(0), x(T_s), x(2T_s), x(3T_s), \ldots]$$

Använd programmet för att generera en signal med frekvensen $f = 440$ Hz och längden 2 sekunder. Använd samplingsfrekvensen $f_s = 8000$ Hz. Illustrera signalen grafiskt för ett lämpligt antal perioder. Generera motsvarande audiosignal med Matlab-programmet `sound(xx,fs)` eller `soundsc(xx,fs)`.

b) En s.k. chirp-signal är en sinusformad signal vars frekvens ändras linjärt som funktion av tiden, dvs

$$x_{chirp}(t) = A\cos(2\pi(f_0 + f_1 t)t + \phi)$$

Skriv i analogi med a-fallet ett program som genererar en chirp-signal med specificerade parametrar.

Använd programmet för att generera en chirp-signal av längden 3 sekunder, vars frekvens
- startar vid 200 Hz och slutar vid 1700 Hz,
- startar vid 300 Hz och slutar vid 15000 Hz.

Använd samplingsfrekvensen $f_s = 8000$ Hz. Lyssna på signalerna i analogi med a-fallet.

Observera att i det senare fallet kommer chirp-signalens frekvens att bli högre än samplingsfrekvensen, varför den inte kan representeras korrekt med den diskreta signalsekvensen $\{x_{chirp}(kT_s)\}$. Använd högre samplingsfrekvens och undersök hur hög samplingsfrekvens som behövs för att få en korrekt representation av signalen.

c) Genom att låta en sinusformad signals amplitud och fas variera med tiden kan en mängd intressanta syntetiska audiosignaler generas. Som exempel betrakta en signal där frekvensen varierar sinusformat med frekvensen f_m kring sitt nominella värde f_0,

$$x_{bell}(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + I(t)\cos(2\pi f_m t))$$

och vars amplitud $A(t)$ och amplituden $I(t)$ hos frekvensvariationerna avtar exponentiellt enligt

$$A(t) = A_0 e^{-t/\tau}, \;\; I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

Skriv i analogi med a- och b-fallen ett program som genererar en signal $x_{bell}(t)$ med specificerade parametrar.

Testa programmet genom att generera en signal av längden 6 sekunder, med
- $f_0 = 110$ Hz, $f_m = 220$ Hz, $A_0 = 1$, $I_0 = 10$ och $\tau = 2$ sekunder, och
- $f_0 = 220$ Hz, $f_m = 440$ Hz, $A_0 = 1$, $I_0 = 5$ och $\tau = 2$ sekunder

Använd samplingsfrekvensen 11025 Hz. Lyssna på signalen.

Periodiska signaler.
d) En periodisk signal ges av

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n) \tag{1}$$

där grundfrekvensen är $f_0 = 100$ Hz, och frekvenskomponenternas amplituder och faser ges av

$$\begin{aligned} A_0 &= 0.5, & \phi_0 &= 0 \\ A_1 &= 0.05, & \phi_1 &= 1.5 \\ A_2 &= 0.15, & \phi_2 &= 0.8 \\ A_3 &= 0.5, & \phi_3 &= -0.2 \\ A_5 &= 0.3, & \phi_5 &= -1.2 \\ A_{10} &= 0.2, & \phi_{10} &= -0.6 \end{aligned} \tag{2}$$

samt $A_n = 0$, $\phi_n = 0$ för alla andra n.

(i) Vad är signalens period T_0?

(ii) Upprita funktionen $x(t)$ över en period ($0 \leq t < T_0$). Använd samplingsintervallet $T_s = T_0/N$, med exempelvis $N = 256$, och beräkna $x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots, x((N-1)T_s)$.

e) Antag att den periodiska signalen i d-fallet är given och man vill bestämma dess frekvenskomponenter (amplitud och fas). Vi har att koefficienterna c_n i utvecklingen (3.40) i kompendiet ges av integralen (3.41). Denna kan approximeras med en summa enligt

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j} n \omega_0 t} dt \\ &\approx \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_s) \mathrm{e}^{-\mathrm{j} n \omega_0 k T_s} \cdot T_s \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_s) \mathrm{e}^{-\mathrm{j} n \omega_0 k T_s} \end{aligned} \tag{3}$$

Summan

$$s_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_s) \mathrm{e}^{-\mathrm{j} n \omega_0 k T_s} \tag{4}$$

kan bestämmas med Matlab-programmet `X=fft(x)` som genererar en vektor X av samma längd som x, så att $X(1) = s_0$ (frekvenskomponenten noll), $X(2) = s_1$ (frekvenskomponenten ω_0), osv så att $X(n+1) = s_n$ (frekvenskomponenten $n\omega_0$) upp till $n = N/2$ (den senare halvan av sekvensen $X(n)$ består av komplexkonjugater till den första halvan).

Använd programmet `fft` för att bestämma koefficienterna s_n. Tag i enlighet med ekv. (3) och (4) $c_n = s_n/N$ i signalens Fourierserieutveckling enligt (3.40). Använd sedan sambanden i avsnitt 3.1 i kompendiet för att bestämma koefficienterna a_n, b_n i den trigonometriska utvecklingen (3.26) samt amplituder A_n och faser ϕ_n då frekvenskomponenterna representeras enligt ekv. (1). Jämför de så erhållna amplituderna och faserna med de riktiga värdena i ekv. (2).