SIGBE/17/1

Sinusformade signaler – knep och knåp.
a) *Sinusformad signal.* Skriv ett program som beräknar den sinusformade signalen

$$x(t) = A\cos(2\pi ft + \phi)$$

i intervallet $0 \leq t \leq t_f$. Använd samplingsintervallet T_s. Programmet skall generera en vektor $\mathbf{x}$ med de samplade signalvärdena $\{x(nT_s)\}$, dvs

$$\mathtt{x} = [x(0), x(T_s), x(2T_s), x(3T_s), \ldots]$$

Använd programmet för att generera en signal med frekvensen $f = 440$ Hz och längden 2 sekunder. Använd samplingsfrekvensen $f_s = 8000$ Hz. Plotta signalen för ett lämpligt antal (t.ex. 10) perioder. Generera och lyssna på motsvarande audiosignal (i Matlab kan `sound(x,fs)` eller `soundsc(x,fs)` användas).

b) *Generering av signal med ett filter.*
Vid realtidstillämpningar är det opraktiskt att beräkna signalvärdena $x(nT_s)$ explicit vid varje tidpunkt. Ett effektivare sätt är då att konstruera signalen rekursivt med hjälp av ett filter.
Visa att en signal $y(n) = \cos(\omega n + \phi)$ satisfierar differensekvationen

$$y(n) - 2\cos(\omega)\ y(n-1) + y(n-2) = 0$$

med initialvärden $y(n) = \cos(\omega n + \phi), n = 0, 1$. Denna differensekvation beskriver en *digital oscillator*, och är ett specialfall av ett digitalt filter.
Konstruera en sinusformad audiosignal $x(nT_s) = \sin(2\pi fnT_s)$ med given frekvens f och lämplig samplingstid T_s med hjälp av en digital oscillator. Använd t.ex. $f = 440$ Hz. Lyssna på signalen och kontrollera resultatet med det i:
`www.szynalski.com/tone-generator/`

c) *Syntetisk audiosignal.* Genom att låta en sinusformad signals amplitud och fas variera med tiden kan en mängd intressanta syntetiska audiosignaler generas. Som exempel betrakta en signal där frekvensen varierar sinusformat med frekvensen f_m kring sitt nominella värde f_0,

$$x_{\text{bell}}(t) = A(t)\cos\left(2\pi f_0 t + I(t)\cos(2\pi f_m t)\right)$$

och vars amplitud $A(t)$ och amplituden $I(t)$ hos frekvensvariationerna avtar exponentiellt enligt

$$A(t) = A_0 e^{-t/\tau},\ \ I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

Skriv i analogi med a- och b-fallen ett program som genererar en signal $x_{\text{bell}}(t)$ med specificerade parametrar.

Testa programmet genom att generera en signal av längden 6 sekunder, med
- $f_0 = 110$ Hz, $f_m = 220$ Hz, $A_0 = 1$, $I_0 = 10$ och $\tau = 2$ sekunder, och
- $f_0 = 220$ Hz, $f_m = 440$ Hz, $A_0 = 1$, $I_0 = 5$ och $\tau = 2$ sekunder

Använd samplingsfrekvensen 11025 Hz. Lyssna på signalen.

d) *Chirp-signal.* En s.k. chirp-signal är en sinusformad signal vars frekvens ändras linjärt som funktion av tiden, dvs

$$x_{\text{chirp}}(t) = A\cos\left(2\pi(f_0 + f_1 t)t\right)$$

Skriv i analogi med a-fallet ett program som genererar en chirp-signal med specificerade parametrar.

Använd programmet för att generera en chirp-signal av längden 3 sekunder, med
- $f_0 = 200$ Hz och $f_1 = 500$ s^{-2},
- $f_0 = 200$ Hz och $f_1 = 15200$ s^{-2}.

Använd samplingsfrekvensen $f_s = 8000$ Hz. Lyssna på signalerna i analogi med a-fallet.

Observera att i det senare fallet kommer chirp-signalens frekvens att bli högre än samplingsfrekvensen, varför den inte kan representeras korrekt med den diskreta signalsekvensen $\{x_{\text{chirp}}(kT_s)\}$. Använd högre samplingsfrekvens och undersök hur hög samplingsfrekvens som behövs för att få en korrekt representation av signalen.

e) *Momentan frekvens.* Upprepa c-fallet med värdena $f_0 = 100$ Hz, $f_1 = 5000$ s^{-2}, och plotta signalen i intervallet $0 \le t \le 0.04$ s.

Plotta även signalen $x(t) = \cos(2\pi 300t)$ med den konstanta frekvensen 300 Hz. Vid vilken tidpunkt ser chirp-signalen ut att ha frekvensen 300 Hz? Förklara resultatet!

[`Ledning:` Frekvensen f hos en sinusformad signal bestämmer hur argumentet (vinkeln) ändras per tidsenhet, dvs för $x(t) = \cos(2\pi ft)$ gäller $x(t+\Delta t) = \cos(2\pi ft + 2\pi f\Delta t)$, så att argumentet under tiden Δt ökar med vinkeln $2\pi f\Delta t$. I analogi med detta definieras för en signal vars frekvens $f(t)$ varierar med tiden den momentana frekvensen $f_{\text{m}}(t)$ vid tiden t så att för små Δt gäller $x(t+\Delta t) \approx \cos(2\pi f(t)t + 2\pi f_{\text{m}}\Delta t)$.
Å andra sidan har vi $x(t+\Delta t) = \cos(2\pi f(t+\Delta t)(t+\Delta t))$. En Taylorserieutveckling av $f(t)$ ger $f(t+\Delta t) \approx f(t) + \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\Delta t$, och det följer att $f(t+\Delta t)(t+\Delta t) \approx \left(f(t) + \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\Delta t\right)(t+\Delta t) \approx f(t)t + \left(f(t) + \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}t\right)\Delta t$, där vi använt det faktum att $\Delta t^2 \approx 0$. Det följer att $x(t+\Delta t) \approx \cos\left(2\pi f(t)t + 2\pi\left(f(t) + \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}t\right)\Delta t\right)$, och den momentana frekvensen ges således av $f_{\text{m}}(t) = f(t) + \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}t$.]