SIGBE/14/2

a) Bestämning av frekvenskomponenter i en signal.
Vid t.ex. mottagning av en modulerad signal är det viktigt att kunna bestämma amplituden och fasen hos olika frekvenskomponenter i signalen. För att illustrera detta, konstruera först signalen

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \tag{1}$$

som består av frekvenskomponenter som är heltalsmultipler av grundfrekvensen $f_0 = 100$ Hz, och frekvenskomponenternas amplituder och faser ges av

$$\begin{aligned}
A_0 &= 0.5, & \phi_0 &= 0 \\
A_1 &= 0.05, & \phi_1 &= 1.5 \\
A_2 &= 0.15, & \phi_2 &= 0.8 \\
A_3 &= 0.5, & \phi_3 &= -0.2 \\
A_5 &= 0.3, & \phi_5 &= -1.2 \\
A_{10} &= 0.2, & \phi_{10} &= -0.6
\end{aligned} \tag{2}$$

samt $A_k = 0$, $\phi_k = 0$ för alla andra k.

- Vad är signalens period T_0?
- Beräkna och plotta $x(t)$ över en period $(0 \le t < T_0)$. Använd samplingsintervallet $T_s = T_0/N$, med exempelvis $N = 512$, och beräkna $x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots, x((N-1)T_s)$.

Visa att funktionsvärdet vid tidpunkterna nT_s kan uttryckas med hjälp av sinusformade signaler $\cos(2\pi kn/N), \sin(2\pi kn/N)$. Visa sedan att om $k \neq \ell$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi kn/N)\sin(2\pi \ell n/N) = 0$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi kn/N)\cos(2\pi \ell n/N) = 0$$

samt för alla heltal k, ℓ,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi kn/N)\cos(2\pi \ell n/N) = 0$$

samt dessutom, att

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi kn/N)^2 = N/2$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi kn/N)^2 = N/2$$

Ledning: Använd trigonometriska formler

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\ \sin\beta &= \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \\
\sin\alpha\ \cos\beta &= \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) \\
\cos\alpha\ \cos\beta &= \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

för utveckling av produkterna i summorna.

- Använd resultatet ovan för att bestämma cosinus- och sinuskomponenterna (a_k respketive b_k), och därmed amplituden och fasen, hos frekvenskomponenten $f = 3f_0$ direkt från den diskreta signalsekvensen $x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots, x((N-1)T_s)$.

b) Beräkning av frekvenskomponent med hjälp av komplexvärda representationer.
I stället för att jobba separat med cosinus- och sinuskomponenter, kan vi kombinera dem till en komplexvärd frekvenskomponent

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N} = \cos(2\pi kn/N) + \mathrm{j}\sin(2\pi kn/N)$$

där reella delen består av cosinuskomponenten och imaginära delen består av sinuskomponenten. Från Eulers formler följer att $x(t)$ kan skrivas

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t} + c_k^* \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k f_0 t}$$

där $c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{j}b_k)$ och $c_k^* = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{j}b_k)$ (komplexa konjugatet). Om vi betecknar $c_{-k} = c_k^*$ kan vi skiva

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t}$$

Visa att

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \ell n/N} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N} = 0$$

om $\ell \neq -k$, och

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \ell n/N} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N} = N$$

om $\ell = -k$. Använd resultatet för att bestämma koefficienterna c_k för frekvenskomponenten $k = 3$ från den diskreta signalsekvensen $x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots, x((N-1)T_s)$. Jämför resultatet med de tidigare beräknade cosinus- och sinuskomponerna, och checka att resultaten överensstämmer.

c) Antal operationer vid beräkning av frekvenskomponenter.

- Hur många operationer behövs för att beräkna en frekvenskomponent hos en diskret signalsekvens av längden N?
- Visa att för en signalsekvens $x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots, x((N-1)T_s)$ samplad med samplingsintervallet $T_s = T_0/N$, så är frekvenskomponenten $k = N$ identisk med frekvenskomponenten $k = 0$, och generellt, att frekvenskomponenten $k + \ell N$ är identisk med frekvenskomponenten k för alla heltal ℓ.
- Hur många operationer behövs för att beräkna de N st frekvenskomponterna $k = 0, 1, \ldots, N-1$ hos en signalsekvens av längden N?
- Hur många operationer behövs för att beräkna de N st frekvenskomponterna $k = 0, 1, \ldots, N-1$ om man använder snabba Fouriertransformen (FFT) för de numeriska beräkningarna?

d) Diskreta Fouriertransformen
Bestäm diskreta Fouriertransformen $\{X(k)\}$ av signalsekvensen $\{x(nT_s)\}$.
- Vilka komponenter hos $X(k)$ är icke-försvinnande?
- Kontrollera att $\{X(k)\}$ ger, så när som på en konstant faktor, frekvenskomponenterna $\{c_k\}$ hos signalen $x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots, x((N-1)T_s)$ uttryckta med hjälp av komplexa exponentialfunktionen. Vilken är faktorn mellan $X(k)$ och c_k?