SIGBE/15/2

a) Bestämning av frekvenskomponenter i en signal.

(i) Vid t.ex. mottagning av en modulerad signal är det viktigt att kunna bestämma amplituden och fasen hos olika frekvenskomponenter i signalen. För att illustrera detta, konstruera först signalen

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \tag{1}$$

som består av frekvenskomponenter som är heltalsmultipler av grundfrekvensen $f_0 = 100$ Hz, och frekvenskomponenternas amplituder och faser ges av

$$\begin{aligned} A_0 &= 0.5, & \phi_0 &= 0 \\ A_1 &= 0.05, & \phi_1 &= 1.5 \\ A_2 &= 0.15, & \phi_2 &= 0.8 \\ A_3 &= 0.5, & \phi_3 &= -0.2 \\ A_5 &= 0.3, & \phi_5 &= -1.2 \\ A_{10} &= 0.2, & \phi_{10} &= -0.6 \end{aligned} \tag{2}$$

samt $A_k = 0$, $\phi_k = 0$ för alla andra k.

- Vad är signalens period T_0?
- Beräkna och plotta $x(t)$ över en period ($0 \le t < T_0$). Använd samplingsintervallet $T_s = T_0/N$, med exempelvis $N = 512$, och beräkna $x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots, x((N-1)T_s)$.

(ii) Bestäm koefficienterna a_k, b_k i utvecklingen

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t) \tag{3}$$

(iii) I stället för att jobba separat med cosinus- och sinuskomponenter, kan vi kombinera dem till en komplexvärd frekvenskomponent

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t} = \cos(2\pi k f_0 t) + \mathrm{j}\sin(2\pi k f_0 t)$$

där reella delen består av cosinuskomponenten och imaginära delen består av sinuskomponenten. Från Eulers formler följer att $x(t)$ kan skrivas

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t} + c_k^* \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k f_0 t}$$

där $c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{j}b_k)$ och $c_k^* = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{j}b_k)$ (komplexa konjugatet). Om vi betecknar $c_{-k} = c_k^*$ kan vi skiva

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t} \tag{4}$$

Bestäm koefficienterna c_k.

(iv) Uttryck den samplade signalen $\{x(nT_s)\}$ (jfr a-fallet) med hjälp av frekvenskomponenter i enlighet med (1), (3) och (4).

(v) Använd likheterna

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \ell n/N} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N} = \begin{cases} 0, & \text{om } \ell \neq -k \\ N, & \text{om } \ell = -k \end{cases}$$

för att bestämma koefficienterna c_k numeriskt för frekvenskomponenten $k = 3$ från den diskreta signalsekvensen $x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots, x((N-1)T_s)$. Kontrollera att resultatet överensstämmer med det teoretiskt beräknade .

(vi) Antal operationer vid beräkning av frekvenskomponenter.

- Hur många operationer behövs för att beräkna en frekvenskomponent hos en diskret signalsekvens av längden N?
- Visa att för en signalsekvens $x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots, x((N-1)T_s)$ samplad med samplingsintervallet $T_s = T_0/N$, så är frekvenskomponenten $k = N$ identisk med frekvenskomponenten $k = 0$, och generellt, att frekvenskomponenten $k + \ell N$ är identisk med frekvenskomponenten k för alla heltal ℓ.
- Hur många operationer behövs för att beräkna de N st frekvenskomponterna $k = 0, 1, \ldots, N-1$ hos en signalsekvens av längden N?
- Hur många operationer behövs för att beräkna de N st frekvenskomponterna $k = 0, 1, \ldots, N-1$ om man använder snabba Fouriertransformen (FFT) för de numeriska beräkningarna?

(vii) Diskreta Fouriertransformen.

Bestäm diskreta Fouriertransformen $\{X(k)\}$ av signalsekvensen $\{x(nT_s)\}$.

- Vilka komponenter hos $X(k)$ är icke-försvinnande?
- Kontrollera att $\{X(k)\}$ ger, så när som på en konstant faktor, frekvenskomponenterna $\{c_k\}$ hos signalen $x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots,\ x((N-1)T_s)$ uttryckta med hjälp av komplexa exponentialfunktionen. Vilken är faktorn mellan $X(k)$ och c_k?