SIGBE/15/4

Talsekvensen i filen
`http://www.users.abo.fi/~htoivone/courses/sigbe/signal2.dat`
representerar en audiosignal $\{x_0(nT_{s0})\}$ som diskretiserats med samplingsfrekvensen $f_{s0} = 11025$ Hz.

(i) Verifiera att signalen är bandbegränsad, samt bestäm signalens högsta frekvenskomponent ω_{max}. Verifiera att $\omega_{max} < \omega_{s0}/8$, där $\omega_{s0} = 2\pi f_{s0}$.

(ii) Enligt Shannons samplingsteorem räcker det med en samplingsfrekvens som satisfierar $\omega_s > 2\omega_{max}$ för att representera signalen. Enligt (i) kan samplingsfrekvensen därför reduceras till $\omega_s = 2 \times (\omega_{s0}/8) = \omega_{s0}/4$, vilket motsvarar samplingstiden $T_s = 4T_{s0}$. Bilda en sådan långsamt samplad diskret signal $\{x(nT_s)\}$ genom att ta vart fjärde element från sekvensen $\{x_0(nT_{s0})\}$, dvs
$\{x(nT_s)\} = \{x_0(nT_s)\} = \{x_0(n4T_{s0})\} = \{x_0(0), x_0(4T_{s0}), x_0(8T_{s0}), \ldots\}$.
Verifiera att de diskreta signalerna representerar samma kontinuerliga signal genom att:

- Lyssna på dem med `soundsc` (observera samplingsfrekvensen!),
- bestämma sekvensernas fouriertransformer $X_0(k)$ respektive $X(k)$, och verifiera att $X_0 = \frac{T_s}{T_{s0}} X$ gäller i frekvensintervallet $\omega < \omega_{s0}/8$.

(iii) Rekonstruera den ursprungliga signalen $\{x_0(nT_{s0})\}$ ur den långsamt samplade signalen $\{x(nT_s)\}$ genom att:

- bilda fouriertransformen $\{X(k)\}$ för $\{x(nT_s)\}$,
- beräkna fouriertransformen $\{X_0(k)\}$ för $\{x(nT_{s0})\}$ ur $\{X(k)\}$ (jfr ovan; $X_0(k) = 4X(k)$ i frekvensintervallet $\omega < \omega_{s0}/8$ och $X_0(k) = 0$ för frekvenser $\omega \geq \omega_{s0}/8$),
- bestämma $\{x_0(nT_{s0})\}$ genom att bilda inversa transformen av $\{X_0(k)\}$.

(iv) Upprepa nedsamplingen i fall (ii) för den icke-bandbegränsade signalen i filen
`http://www.users.abo.fi/~htoivone/courses/sigbe/signal.dat`.
Bilda den nedsamplade signalens fouriertransform och verifiera att den nedsamplade signalens frekvenskomponenter (med beaktande av skalningsfaktorn $\frac{T_s}{T_{s0}}$) består av den ursprungliga signalens frekvenskomponenter plus summan av alla alias- och vikta frekvenskomponenter från den ursprungliga signalen.

SIGBE/15/4 (iv) TIPS

Problemet är att verifiera att den nedsamplade signalens frekvenskomponenter är sammansatt av den ursprungliga signalens frekvenser plus alla aliasfrekvenser som uppstår pga nedsamplingens. Dessa kan bestämmas enligt nedan:

Beteckna den med samplingsperioden T_{s0} samplade signalen med $\{s_0(n_0 T_{s0})\}$, $n_0 = 0, 1, \ldots, N_0 - 1$, och den nedsamplade signalen med $\{s(nT_s)\}$, där $s(nT_s) = s_0(4nT_{s0}), n = 0, 1, \ldots, N-1$, där $N = N_0/4$.

Sekvensen $\{s_0(n_0 T_{s0})\}$ kan uttryckas med hjälp av motsvarande fouriertransform $S_0(k)$ enligt

$$s_0(n_0 T_{s0}) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} S_0(k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k n_0/N_0}$$

Då fås för den nedsamplade signalen

$$\begin{aligned} s(nT_s) &= s_0(4nT_{s0}) \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} S_0(k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k 4n/N_0} \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} S_0(k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k n/(N_0/4)} \end{aligned}$$

Eftersom

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/(N_0/4)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/(N_0/4) + \mathrm{j}2\pi l n} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi (k + lN_0/4) n/(N_0/4)}$$

kan vi kombinera termerna för k $(0 < k < N_0/4)$ och $k + N_0/4, k + 2N_0/4$ och $k + 3N_0/4$, så att summan kan skrivas

$$\begin{aligned} s(nT_s) &= \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} S_0(k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/(N_0/4)} \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0/4-1} \Big(S_0(k) + S_0(k + N_0/4) + S_0(k + 2N_0/4) + S_0(k + 3N_0/4) \Big) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/(N_0/4)} \end{aligned}$$

Introduktion av den nedsamplader signalens längd $N = N_0/4$ ger

$$s(nT_s) = \frac{1}{4N} \sum_{k=0}^{N-1} \Big(S_0(k) + S_0(k+N) + S_0(k+2N) + S_0(k+3N) \Big) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N}$$

Observerar vi till slut att nedsamplade sekvensen $\{s(nT_s)\}$ kan uttryckas med hjälp av motsvarande fouriertransform $S(k)$ enligt

$$s(nT_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N}$$

ser vi att

$$S(k) = \frac{1}{4} \Big(S_0(k) + S_0(k+N) + S_0(k+2N) + S_0(k+3N) \Big)$$

där $S_0(k+N), S_0(k+2N)$ och $S_0(k+3N)$ kan ses som aliaskomponenter till $S_0(k)$.