SIGBE/14/4 (iv) TIPS

Shannons rekonstruktionsformel

$$x(mT_s + \alpha T_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\frac{\sin(\omega_s(mT_s + \alpha T_s - nT_s)/2)}{\omega_s(mT_s + \alpha T_s - nT_s)/2)}$$

där $0 < \alpha < 1$. Det här uttrycket kan förenklas. Vi har att $\omega_s T_s = 2\pi$, vilket ger

$$x(mT_s + \alpha T_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\frac{\sin(\pi(m + \alpha - n))}{\pi(m + \alpha - n)}$$

Dessutom använder vi oss av ett ändligt antal sampel för rekonstruktionen

$$x(mT_s + \alpha T_s) = \sum_{n=m-M}^{m+M} x(nT_s)\frac{\sin(\pi(m + \alpha - n))}{\pi(m + \alpha - n)}$$

i det här fallet $2M + 1$ sampel.

Sinc-funktionen kan förenklas på följande sätt:

$$\begin{aligned} \sin(\pi(m-n) + \alpha\pi) &= \sin(\pi(m-n))\cos(\alpha\pi) + \cos(\pi(m-n))\sin(\alpha\pi) \\ &= (-1)^{m-n}\sin(\alpha\pi) \end{aligned}$$

eftersom $\sin(\pi(m-n)) = 0$ och

$$\cos(\pi(m-n)) = \begin{cases} 1, & m-n \text{ jämn} \\ -1, & m-n \text{ udda} \end{cases}$$

som kan skrivas som $\cos(\pi(m-n)) = (-1)^{m-n}$.

I vårt fall har vi $\alpha = 1/4, 1/2, 3/4$, så vi får

$$\begin{aligned} \sin(\pi/4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\pi/2) &= 1 \\ \sin(3\pi/4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Vi får att

$$\frac{\sin(\pi(m + \alpha - n))}{\pi(m + \alpha - n)} = \frac{(-1)^{m-n}\sin(\alpha\pi)}{\pi(m - n + \alpha)}$$

$$x(mT_s + \alpha T_s) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=m-M}^{m+M}\frac{(-1)^{m-n}}{m - n + \alpha}x(nT_s)$$

I en effektiv implementering kan vi spara sekvensen $\{x(nT_s)\}_{m-M}^{m+M}$ i en vektor

$$X(m) = \begin{bmatrix} x((m+M)T_s) \\ \vdots \\ x(mT_s) \\ \vdots \\ x((m-M)T_s) \end{bmatrix}$$

Vi får en radvektor med koefficienter som kan beräknas på förhand

$$k_\alpha = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{(-1)^{-M}}{\alpha-M},\ldots,\frac{1}{\alpha},\ldots,\frac{(-1)^M}{\alpha+M}\right]$$

Då kan rekonstruktionsformeln skrivas kompakt som

$$x(mT_s + \alpha T_s) = k_\alpha X(m)$$