SIGBE/14/4 (v) TIPS

Problemet är att verifiera att den nedsamplade signalens frekvenskomponenter är sammansatt av den ursprungliga signalens frekvenser plus alla aliasfrekvenser som uppstår pga nedsamplingens. Dessa kan bestämmas enligt nedan:

Beteckna den med samplingsperioden T_{s0} samplade signalen med $\{s_0(n_0T_{s0})\}, n_0 = 0, 1, \ldots, N_0 - 1$, och den nedsamplade signalen med $\{s(nT_s)\}$, där $s(nT_s) = s_0(4nT_{s0}), n = 0, 1, \ldots, N-1$, där $N = N_0/4$.

Sekvensen $\{s_0(n_0T_{s0})\}$ kan uttryckas med hjälp av motsvarande fouriertransform $S_0(k)$ enligt

$$s_0(n_0T_{s0}) = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} S_0(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k n_0/N_0}$$

Då fås för den nedsamplade signalen

$$\begin{aligned} s(nT_s) &= s_0(4nT_{s0}) \\ &= \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} S_0(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k4n/N_0} \\ &= \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} S_0(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/(N_0/4)} \end{aligned}$$

Eftersom

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/(N_0/4)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/(N_0/4)+\mathrm{j}2\pi ln} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(k+lN_0/4)n/(N_0/4)}$$

kan vi kombinera termerna för k $(0 < k < N_0/4)$ och $k + N_0/4, k + 2N_0/4$ och $k + 3N_0/4$, så att summan kan skrivas

$$\begin{aligned} s(nT_s) &= \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} S_0(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/(N_0/4)} \\ &= \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0/4-1}\Big(S_0(k) + S_0(k+N_0/4) + S_0(k+2N_0/4) + S_0(k+3N_0/4)\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/(N_0/4)} \end{aligned}$$

Introduktion av den nedsamplader signalens längd $N = N_0/4$ ger

$$s(nT_s) = \frac{1}{4N}\sum_{k=0}^{N-1}\Big(S_0(k) + S_0(k+N) + S_0(k+2N) + S_0(k+3N)\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N}$$

Observerar vi till slut att nedsamplade sekvensen $\{s(nT_s)\}$ kan uttryckas med hjälp av motsvarande fouriertransform $S(k)$ enligt

$$s(nT_s) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn/N}$$

ser vi att

$$S(k) = \frac{1}{4}\Big(S_0(k) + S_0(k+N) + S_0(k+2N) + S_0(k+3N)\Big)$$

där $S_0(k+N), S_0(k+2N)$ och $S_0(k+3N)$ kan ses som aliaskomponenter till $S_0(k)$.